Grundbegriffe der Mathematik, WS 2011/2012, 3. Übungsblatt

24. Betrachten Sie folgende Strukturen $(H, \circ)$. Ist $\circ$ eine innere Verknüpfung in H? Ist $(H, \circ)$ eine Halbgruppe? Ist $(H, \circ)$ ein Monoid?

    (a) $H = \mathbb{R}^2$ und $\circ$ ist durch $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$, $\forall\big((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)\big) \in H^2$, definiert. (+ bezeichnet hier die herkömmliche Zahlenaddition und x_1x_2 bzw. y_1y_2 ist das herkömmliche Produkt der reellen Zahlen x_1, x_2 bzw. y_1, y_2.)

    (b) $H = \{x \in \mathbb{N} | \ x \text{ ist gerade}\}$ und $\circ$ ist durch $x \circ y = \frac{x \cdot y}{2}$, $\forall (x, y) \in H^2$, definiert. ($x \cdot y$ bezeichnet hier das herkömmliche Produkt der natürlichen Zahlen x und y.)

25. Bestimmen sie welche Verknüpfungen $\oplus$ auf den reellen Zahlen assoziativ bzw. kommutativ sind:

    (a) $x \oplus y = -x - y$ (b) $x \oplus y = \max\{x, 8\}$ (c) $x \oplus y = \max\{x, y\}$ (d) $x \oplus y = x + y + xy + 6$

26. Betrachten Sie die Menge $G = \{wahr, falsch\}$ mit der logischen UND-Operation '$\wedge$'. Ist $(G, \wedge)$ eine Halbgruppe? Ist $(G, \wedge)$ eine Gruppe?

Für endliche Mengen (mit wenigen Elementen) können innere Verknüpfungen mit Hilfe der sogenannten *Verknüpfungstafel* explizit angegeben werden. Sei $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ eine n-elementige Menge und $\circ\colon H \times H \to H$ eine innere Verknüpfung in H. Die Verknüpfungstafel von $\circ$ ist eine quadratische Tabelle mit $n + 1$ Spalten und $n + 1$ Zeilen, sodass der Tabelleneintrag in Zeile $i + 1$ und Spalte $j + 1$ gleich dem Element $h_i \circ h_j$ ist. In der ersten Zeile und in der ersten Spalte werden die Elemente $h_1, h_2, \ldots, h_n$ in genau dieser Reihenfolge und beginnnend mit der zweiten Spalte bzw. mit der zweiten Zeile eingetragen.

27. Sei $H = \{a, b, c, d\}$ eine vier-elementige Menge und $\cdot$ eine innere Verknüpfung in H, mit unvollständiger Verküpfungstafel wie folgt:

·	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d	?	?	?	?

    Verfvollständigen Sie diese Verknüpfungstafel auf alle möglichen Arten, sodass eine Halbgruppe $(H, \cdot)$ entsteht.

28. Sei $H = \{1, 2, 3\}$ eine drei-elementige Menge und $\cdot$ eine innere Verknüpfung in H, mit unvollständiger Verknüpfungstafel wie folgt:

·	1	2	3
1	3	2	1
2	?	?	2
3	1	?	?

    Verfvollständigen Sie diese Verknüpfungstafel auf alle möglichen Arten, sodass ein Monoid $(H, \cdot)$ entsteht.

29. Sei $H := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren auf H die Operation $\oplus$ durch $f \oplus g\colon M \to G$, $x \mapsto f(x) + g(x)$. Zeigen Sie, dast $(H, \oplus)$ eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe kommutativ?

30. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $1 \in R$ das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $\cdot$ und $0 \in R$ das neutrale Element der kommutativen Gruppe $(R, +)$. Zeigen Sie, dass mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$, welche für alle $a, b \in R$ durch

$$a \oplus b = a + b + 1 \quad \text{und} \quad a \odot b = a + b + ab$$

    definiert sind, ein neuer Ring mit Eins $(R, \oplus, \odot)$ entsteht.