Grundbegriffe der Mathematik, WS 2011/2012, 2. Übungsblatt

14. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie die wahren Aussagen und geben jeweils ein Gegenbeispiel für die falschen. Bei e) und f) sind A, B, C beliebige Mengen.

$$\text{(a)}\, \emptyset \subseteq \emptyset \quad \text{(b)}\ \ \emptyset \in \emptyset \quad \text{(c)}\, \emptyset \in \{\emptyset\} \quad \text{(d)}\, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$$

$$\text{(e)}\, (A \in B) \wedge (B \subseteq C) \to (A \in C) \quad \text{(f)}\, (A \subseteq B) \wedge (B \in C) \to A \subseteq C\,.$$

15. Finden Sie eine Familie von Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:
(i) $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$ und (ii) für alle $I \subset \mathbb{N}$, I endlich, gilt $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

16. Es seien $f\colon A \to B$ eine Funktion, $C \subseteq A$ und $D \subseteq B$. Beweisen oder widerlegen Sie:
    (a) $f(A) \setminus f(C) \subseteq f(A \setminus C)$
    (b) Wenn f bijektiv ist, dann gilt $f^{-1}(B \setminus D) = A \setminus f^{-1}(D)$.
    (c) Wenn f bijektiv, dann gilt $f(C \cap f^{-1}(D)) = f(C) \cap D$.

17. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 6x + 7$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass die Einschränkung f_D injektiv ist. Weiters geben Sie gegebenfalls eine eine möglichst große Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f\colon \mathbb{R} \to B$ surjektiv ist.

18. Stellen Sie für jede der folgenden Funtionen $f\colon A \to B$ fest, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Bestimmen Sie für jede bijektive Funktion die Umkehrfunktion!
    (a) $A = \mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen), $B = \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen) und $f(x) = |x+1|$, $\forall x \in A$.
    (b) $A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{R}^2$ und $f((x,y)) = (x^3, y^3 - x^2)$, $\forall (x.y) \in A$.
    (c) $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $\forall x \in A$.

19. Bestimmen Sie $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $(f \circ g) \circ h$ und $f \circ (g \circ h)$ für die folgenden drei Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}_*$

$$f(n) = n + 1 \quad g(n) = 2n \quad h(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

wobei $\mathbb{N}_* := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

20. Seien $M \neq \emptyset$ und N zwei Mengen und $f\colon M \to N$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f dann und nur dann surjektiv ist, wenn es eine Funktion $g\colon N \to M$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gilt.

21. Sei $M = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ und R jene Relation auf M, die durch $iRj \Leftrightarrow |i| \geq |j|$ definiert ist. Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation, eine Ordnungsrelation, beides, oder keines von beiden? (Hier wird als $|i|$ die Anzahl der Elemente der Menge i bezeichnet.)

22. Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen $R \subseteq A \times A$ transitiv, reflexiv, symmetrisch bzw. antisymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen? Bestimmen Sie für diese die Klasseneinteilung. Welche Relationen sind Ordnungsrelationen?
    (a) $A = \mathbb{N}_* = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ und $(i,j) \in R \ \Leftrightarrow (i + j$ ist ein Vielfaches von 2).
    (b) $A = \mathbb{R}^2$ und $R = \big\{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,\big|\, x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\big\}$.
    (c) $A = \mathbb{R}^2$ und $R = \big\{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,\big|\, x_1^2 + y_1^2 < x_2^2 + y_2^2\big\}$.

23. Wir schreiben $a|b$ für die Teilerrelation:

$$a|b \text{ („}a\text{ teilt }b\text{“)} \Leftrightarrow \text{es gibt eine ganze Zahl } x, \text{ sodass } b = a \cdot x \text{ gilt.}$$

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen und welche sind Ordnungsrelationen?

(a) Die Teilerrelation auf dem Intervall $[1,2] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 2\}$.

(b) Die Teilerrelation auf der Menge $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 4\}$.

(c) Die Teilerrelation auf der Menge $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.