Grundbegriffe der Mathematik, WS 2011/2012, 1. Übungsblatt

1. Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage?
   (a) Ich studiere Technische Mathematik.
   (b) Alle Bewohner von Graz sprechen mindestens eine Fremdsprache.
   (c) $x^2 > 0$.

2. Sind folgende Aussagen Tautologien, oder Kontradiktionen, oder weder noch?
   (a) $(a \wedge \neg a) \wedge (a \leftrightarrow b)$.
   (b) $(a \leftrightarrow b) \rightarrow (a \wedge b)$.
   (c) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$.
   (d) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$.

3. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden logischen Ausdrücke auf:
   (a) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.
   (b) $(a \rightarrow \neg b) \rightarrow (c \rightarrow (\neg b \vee a))$.

4. Finden Sie einen logischen Ausdruck (nur mit $\neg$, $\wedge$ und $\vee$), der genau dann wahr ist, wenn genau zwei der vier Variablen p, q, r und s wahr sind.

5. Bringen Sie $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (r \rightarrow s)$ auf
   (a) konjunktive
   (b) disjunktive

   Normalform.

6. (Krimi, Teil 1) Inspektor Brown versucht den Missetäter unter drei Verdächtigen zu identifizieren. Er weiß, dass es ein Einzeltäter ist, und er weiß, dass jeder Verdächtige eine wahre und eine falsche Aussage macht.
   (a) James sagt: Ich war's nicht. Thomson ist unschuldig.
   (b) Thomson sagt: Ich war's nicht. Frazer ist unschuldig.
   (c) Frazer sagt: Ich war's nicht. Ich weiß nicht, wer es getan hat.

   Wen soll Inspektor Brown verhaften?

7. (Krimi, Teil 2). Inspektor Brown verdächtigt den Gärtner des Mordes am Butler. Inspektor Brown weiß, dass Mörder beim Verhör immer nervös werden. Weiter weiß Inspektor Brown, dass nur der Mörder blutige Hände haben kann.
   (a) Der Gärtner wird beim Verhör nervös. Folgt daraus, dass er der Mörder ist?
   (b) Der Gärtner hat blitzsaubere Hände. Folgt daraus, dass er nicht der Mörder ist?

8. Nehmen wir an, dass wir die folgenden drei Lemmas (Hilfssätze) bewiesen haben:

   Lemma 1: Aus Aussage A folgt Aussage C.

   Lemma 2: Wenn Aussage B nicht gilt, dann muss Aussage A gelten.

   Lemma 3: Aus Aussage B folgt Aussage C.

   Betrachten Sie folgenden Beweis der Aussage C unter Benützung dieser Lemmas.

   Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Fall I: A gilt. Wir wenden Lemma 1 an und sind fertig.
- Fall II: A gilt nicht. In diesem Fall unterscheiden wir zwei Unterfälle.
- Fall IIa: B gilt nicht. Dann wenden wir Lemma 2 an und schließen daraus A, im Widerspruch zur Voraussetzung von Fall II. Daher brauchen wir diesen Fall nicht zu betrachten.
- Fall IIb: B gilt. Mit Hilfe von Lemma 3 ergibt sich C.

Ende des Beweises.

Ist dieser Beweis gültig? Finden Sie gegebenenfalls einen alternativen (eventuell kürzeren) Beweis.

9. Seien x und y reelle Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Verneinen Sie sowohl die richtigen als auch die falschen Aussagen (im resultierenden Ausdruck sollen sämtliche Quantoren vor allen $\neg$'s stehen).

   (a) $\forall x \exists y \colon y^3 = x$,

   (b) $\forall x \forall y \colon x \neq y$,

   (c) $\forall x \exists y \colon xy = 0$,

   (d) $\neg(\exists x \forall y \colon x \leq y)$.

10. Drücken Sie folgende Mengen durch Angabe einer Eigenschaft formal aus:

    (a) $M = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \ldots\}$,

    (b) $M = \{1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, \ldots\}$,

    (c) $M = \{1/2, 1/3, 1/5, 1/7, 1/11, 1/13, 1/17, 1/19, 1/23, 1/29, 1/31, \ldots\}$.

11. Sei $M = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge von M? Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ explizit an.

12. Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig? Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis und zu falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

    (a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

    (b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,

    (c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$,

    (d) $(\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A) = \emptyset) \to (B \subseteq A)$.

13. Wahr oder Falsch? Geben sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu folgender Aussage an:
    Für beliebige Mengen A, B, C gilt: Aus $A \cap B = A \cup C$ und $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cup C$, folgt $B = C$.