Grundbegriffe der Mathematik, WS 2009/2010, 4. Übungsblatt

31. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Beziehung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 7k + 12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}\,.$$

32. Man zeige für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}\,.$$

33. Beweisen Sie den binomischen Lehrsatz durch vollständige Induktion: In einem kommutativen Ring R gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

für $x, y \in R$ und $N \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

34. Man zeige:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},\ 0 \le m \le n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}.$$

35. Sei $(M, \le)$ eine totalgeordnete Menge und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass durch

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le_{lex} (b_1, b_2, \ldots, b_n) :\Longleftrightarrow$$

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \ \vee\ (\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\} : (a_j < b_j \wedge (\forall i < j :\ a_i = b_i)))$$

eine Totalordnung auf M^n definiert wird. (Diese Ordnung heißt *lexikographische Ordnung auf* M^n.)

36. Zeigen Sie, dass die durch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

definierte Multiplikation rationaler Zahlen wohldefiniert ist, d.h., nicht vonn der Wahl der Repräsentanten für die Brüche abhängt.