Grundbegriffe der Mathematik, WS 2009/2010, 3. Übungsblatt

24. Sei M eine Menge und H die Menge der Funktionen $f\colon M \to M$. Betrachten Sie die innere Verknüpfung $\circ$ in M, die durch $f \circ g(x) = f(g(x))$, $\forall x \in M$, definiert wird.
    (a) Zeigen Sie, dass die Menge H mit der Verknüpfung $\circ$ ein Monoid bildet. Ist $(H, \circ)$ eine Gruppe?
    (a) Sei G die Menge der Bijektionen $g\colon M \to M$. Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist. Ist diese eine Abelsche Gruppe?

25. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}^2$ mit der Operation *Skalarprodukt*, wobei $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$, $\forall (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, gilt. Ist die Struktur $(\mathbb{R}^2, \circ)$ eine Halbgruppe? Besitzt $(\mathbb{R}^2, \circ)$ euine neutrales Element?

26. Bestimmen sie welche Operationen $\oplus$ auf den reellen Zahlen assoziativ bzw. kommuutativ sind:
    (a) $x \oplus y = x - y$
    (b) $x \oplus y = x + y + 3$
    (c) $x \oplus y = |x| + y$
    (d) $x \oplus y = |x| + |y|$
    (e) $x \oplus y = \max\{x, y\}$
    (f) $x \oplus y = x + y + xy$

27. Betrachten Sie die Menge $G = \{wahr, falsch\}$ mit der ODER-Operation '$\vee$'. Ist $(G, \vee)$ eine Halbgruppe? Ist $(G, \vee)$ eine Gruppe?

28. Es sei K ein Körper mit der Addition $+$, der Multiplikation $\cdot$, mit dem Eins-Element 1 und dem Null-Element 0. Zeigen Sie, dass mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$, welche für $a, b \in K$ durch

$$a \oplus b = a + b + 1 \quad \text{und} \quad a \odot b = a + b + ab$$

    definiert sind, ein neuer Körper K^* entsteht.

29. Sei p eine Primzahl und $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} \big| a \equiv x \mod p\}$ die Restklasse von a modulo p. Sei $\mathbb{Z}_p = \{\bar{a} \big| a \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der Restklassen modulo p. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ ein nullteilerfreier Ring ist.

30. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe, M eine Menge und $H := \{f\colon M \to G\}$ die Menge der Funktionen von M nach G. Wir definieren auf H die Operation $\odot$ durch $f \odot g\colon M \to G$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$. Zeigen Sie, dast $(H, \odot)$ eine Gruppe bildet.