Grundbegriffe der Mathematik, WS 2009/2010, 2. Übungsblatt

13. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

    (a) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (b) $\emptyset \in \emptyset$ (c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (e) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$ (f) $\{a,b\} \in \{a,\{\{a,b\}\},b\}$

14. Es sei M_j, $j \in J$, ein System von Mengen mit $\cap_{j\in J} M_j = \emptyset$. Ist die Aussage „Es gibt stets zwei Mengen M_{j_1} und M_{j_2} mit $M_{j_1} \cap M_{j_2} = \emptyset$“ wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

15. A und B seien Mengen, f eine Abbildung von A in B, $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$. Dann gilt:

    (a) $M \subseteq f^{-1}(f(M))$
    (b) $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$

    Geben Sie für jeden Fall Beispiele an, wo die Inklusion echt bzw. mit Gleichheit erfüllt ist. Überlegen Sie für jeden Fall, welche Eigenschaften der Funktion f die Gleichheit garantieren würden.

16. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 8x + 12$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass die Einschränkung f_D injektiv ist. Weiters geben Sie gegebenfalls eine eine möglichst große Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f\colon \mathbb{R} \to B$ surjektiv ist.

17. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen bijektiv sind und bestimmen Sie deren Umkehrfunktion:

    (a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, sodass
    $$n \mapsto \begin{cases} n/2, & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ (1-n)/2, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$
    (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $(x,y) \mapsto (x^3, x+2y)$.

18. Seien f und g bijektive Abbildungen von M nach M. Zeigen Sie, dass auch $f \circ g$ eine bijektive Abbildung von M nach M ist.

19. Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{2x^2+1}{x-2}$ eine Funktion ist. Bestimmen Sie weiters das Bild von f. Ist f surjektiv?

20. Für eine endliche Menge M (d.h. eine Menge mit endlich veilen Elementen) bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl der Elemente in M. Seien A und B endliche Teilmengen einer beliebigen Menge R. Zeigen Sie, dass $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Leiten Sie daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her.

21. Sei $M = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ und R jene Relation auf M, die durch $iRj \Leftrightarrow |i| \geq |j|$ definiert ist. Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation, eine Ordnungsrelation, beides, oder keines von beiden? ($|i|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der Menge i wie auch im Übungsbeispiel 20 definiert .)

22. Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen $R \subseteq A \times A$ transitiv, reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen? Bestimmen Sie für diese die Klasseneinteilung. Welche Relationen sind Ordnungsrelationen?

    (a) $A = \mathbb{N}_* = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$ und $(i,j) \in R \Leftrightarrow$ (es gibt eine positive ganze Zahl x, die kleiner als i und kleiner als j ist).
    (b) $A = \mathbb{N}_* = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$ und $R = \{(i,i+1) \,\big|\, i \in \mathbb{N}_*\}$.

23. Wir schreiben $a|b$ für die Teilerrelation:
    $$a|b \text{ („}a \text{ teilt } b\text{“)} \Leftrightarrow \text{es gibt eine ganze Zahl } x, \text{ sodass } b = a \cdot x \text{ ist}$$
    Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen und welche sind Ordnungsrelationen?

    (a) Die Teilerrelation auf dem Intervall $[2,3] = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, 2 \leq x \leq 3\}$.
    (b) Die Teilerrelation auf der Menge $\{x \in \mathbb{N} \,\big|\, x \geq 2\}$.
    (c) Die Teilerrelation auf der Menge $\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$.