Name: **Matrikelnummer:**

Grundbegriffe der Mathematikl: 2. Miniklausur

16. Oktober 2009

Aufgabe:	1	2	3		
Punkte:	3	4	3		
				=	*Punkte*

Bitte beachten:

- **Alle** Rechenschritte sind anzugeben und **alle** Antworten sind zu begründen!
- Erlaubte Hilfsmittel und Unterlagen: Alles mit Ausnahme von Internet und Handys!
- Bitte schreiben Sie jedes Beispiel auf ein eigenes Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit der Beispielnummer, mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer. Bitte nummerieren Sie die Blätter zu jedem Beispiel und geben Sie auch die Anzahl der Blätter zu jedem Beispiel an.
- Bitte geben Sie auch das Angabeblatt ab! Die Prüfungsangaben werden nach der Prüfung auf der LV-Homepage veröffentlicht.
- Zeit: 60 Minuten

1. Betrachten Sie die folgende Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt aRb dann und genau dann, wenn $a/b = 2^k$ für eine $k \in \mathbb{Z}$ (beachten Sie, dass k negativ sein kann!). Beweisen Sie, das R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die dazugehörigen Äquivalenzklassen an.

2. Betrachten Sie die Menge $G = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ und die Verknüpfung $\circ$, die durch $a \circ b = a + b + 2ab$, $\forall a, b \in G$, definiert wird. Ist $\circ$ eine innere Verknüpfung in G? Ist G eine Halbgruppe? Besitzt $(G, \circ)$ ein neutrales Element? Ist $(G, \circ)$ eine Abelsche Gruppe? Beantworten Sie die obigen Fragen auch für die Struktur $(\mathbb{R}, \circ)$.

3. Beweisen Sie die untenstehende Gleichung mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Das heißt, die Summe der Kuben der ersten n natürlichen Zahlen ist gleich dem Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

   Hinweis: Nutzen Sie die Formel über die Summe $\sum_{k=1}^{n} k$ der ersten n natürlichen Zahlen, vgl. Vorlesung.