Diskrete Mathematik, WS 2012/2013, 7. Übungsblatt

32.

(a) Seien m, $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$. Zeigen Sie $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Hinweis: Zeigen Sie

$$\mu(\mathbb{Z}_{mn}^*) = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^* \quad ,$$

wobei $\mu\colon \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ die bijektive Abbildung aus dem Beweis des chinesischen Restsatzes ist.

(b) Sei $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} \in \mathbb{N}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen, $p_1, \dots, p_k$ und $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1) p_i^{e_i - 1} \quad .$$

33. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 753 \\ x &\equiv 7 \mod 221 \quad . \end{aligned}$$

34. Seien a, $b \in \mathbb{Z}$, m, $n \in \mathbb{N}$ und $d = \mathrm{ggT}(m,n)$. Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} x &\equiv a \mod m \\ x &\equiv b \mod n \end{aligned}$$

genau dann lösbar ist, wenn $a \equiv b \mod d$ gilt.

35. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, für die $2^n - n$ durch p teilbar ist. Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $p = 2$, $p > 2$. Für $p > 2$ können Sie den kleinen Satz von Fermat benutzen.