Diskrete Mathematik, WS 2012/2013, 6. Übungsblatt

27. Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus um $\mathrm{ggT}(11026, 6179)$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(11026, 6179) = 11026x + 6179y$ zu bestimmen.

28. Beweisen Sie: Sind a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, so gibt es eindeutig bestimmte q, $r \in \mathbb{Z}$ mit $a = qb + r$ und $-\frac{|b|}{2} < r \leq \frac{|b|}{2}$.

29. Formulieren Sie mit Hilfe von Aufgabe 28 eine Variante des euklidischen Algorithmus, für welche gilt: Sind a, b, $k \in \mathbb{N}$ mit $b \leq a$ und $2^{k-1} \leq b < 2^k$, so läßt sich $\mathrm{ggT}(a, b)$ in höchstens k Schritten berechnen.

    Lösen Sie mit dieser Variante noch einmal Aufgabe 27. Wie viele Schritte benötigen Sie dabei?

30. Seien a, m, $n \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$. Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\mathrm{ggT}(n,m)} - 1$.

31. Seien a, b, $c \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und sei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Wir betrachten die Gleichung

$$ax + by = c, \quad x, y \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

    (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) genau dann eine Lösung besitzt, wenn $d \mid c$ gilt.

    (b) Sei (x_0, y_0) eine Lösung von (1). Dann ist

$$\{(x_0, y_0) + k(\frac{b}{d}, -\frac{a}{d}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

    die Lösungsmenge von (1).