Diskrete Mathematik, WS 2012/2013, 4. Übungsblatt

19. Zeigen Sie, dass die Zahl
$$5^{2n+1}2^{n+2} + 3^{n+2}2^{2n+1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ von 19 geteilt wird.

20. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 3 \pmod 4$ gibt.

21. Sei p eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei
$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\} \quad .$$
Wie kann man $v_p(n)$ aus der Primfaktorzerlegung von $|n|$ ablesen?

    Zeigen Sie: Ist $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und sind $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $r = a/b = c/d$, so gilt $v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$. Wir können daher durch $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$, $a,\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, eine Funktion $v_p \colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Zeigen Sie, dass v_p folgende Eigenschaften besitzt:

    (a) $v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$ für alle $r,\ s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

    (b) Sind $r,\ s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $r + s \neq 0$, so gilt $v_p(r+s) \geq \min\{v_p(r), v_p(s)\}$. Ist $v_p(r) \neq v_p(s)$, so gilt sogar Gleichheit.

    (c) Für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt genau dann $r \in \mathbb{Z}$, wenn $v_p(r) \geq 0$ für alle Primzahlen p ist.

22. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N} \quad .$$
(Hinweis: Aufgabe 21).