Diskrete Mathematik, WS 2012/2013, 3. Übungsblatt

14. Seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion f von A nach B wird mit $f\colon A \to B$ bezeichnet und ist definiert als eine Regelvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet. $f\colon A \to B$ heißt *injektiv*, falls $\forall a, b \in A$, $(a \neq b) \to (f(a) \neq f(b))$. $f\colon A \to B$ heißt *surjektiv*, falls $\forall b \in B$, $\exists a \in A$, mit $f(a) = b$. $f\colon A \to B$ heißt *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

    Welche der folgenden Relationen $R \subseteq A \times B$ zwischen A und B entspricht einer Funktion von A nach B, d.h. für welche der folgenden Relationen existiert eine Funktion $f\colon A \to B$ mit $\{(a, f(a))\colon a \in A\} = R$? Stellen Sie ggf. fest, ob die der Relation entsprechende Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Stellen Sie ebenfalls fest ob R linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig ist. Wie hängen diese Eigenschaften der Relation R mit den oben genannten Eigenschaften der dazugehörigen Funktion f zusammen?

    (a) $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = j^2\}$.
    (b) $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = i \cdot j\}$
    (c) $A = B = \{0, -2, 2, -4, 4\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = j^2\}$
    (d) $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{0, 2, 1\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = j^2\}$

15. Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Wir definieren mit Hilfe von f die Relation $\sim$ auf A, sodass $\forall i, j \in A$, $(i \sim j) \Leftrightarrow (f(i) = f(j))$.

    (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
    (b) Es sei $\{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{0\}\}$ eine Klasseneinteilung der Menge $A = \{0, 1, \ldots, 7\}$. Bestimmen Sie eine funktion $f\colon A \to B$ mit einer geeigneten Menge B, sodass $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{0\}$ die Äquivalenzklassen der oben gegebenen Relation $\sim$ sind.
    (c) Gibt es zu jeder Klasseneinteilung eine passende Funktion f, sodass die dazugehörige Äquivalenzrelation $\sim$ genau diese Klasseneinteilung induziert?

16. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt

$$a \cdot b = ggT(a, b) \cdot kgV(a, b)\,.$$

17. Es sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $k \in N$ gibt, sodass $p = 6k - 1$ oder $p = 6k + 1$ gilt.

18. Beweisen Sie folgende Behauptung: Ist $p > 2$ eine Primzahl, dann gilt $24 | p^3 - p$.