Diskrete Mathematik, WS 2012/2013, 2. Übungsblatt

7. Verneinen Sie die Aussage $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \mathrm{b} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{f(a)} = \mathrm{f(b)} \leftrightarrow \mathrm{a}^2 = \mathrm{b}$.
   (In der Antwort soll kein $\neg$ mehr vorkommen, wohl erlaubt ist $\neq$.)

8. Ist $((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$ eine Tautologie, eine Kontradiktion, oder weder noch? Begründen Sie Ihre Antwort formal.

9. Sei $M = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ und R jene Relation auf M, die durch $iRj \Leftrightarrow |i| \geq |j|$ definiert ist. Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation, eine Ordnungsrelation, beides, oder keines von beiden? ($|i|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der Menge i.)

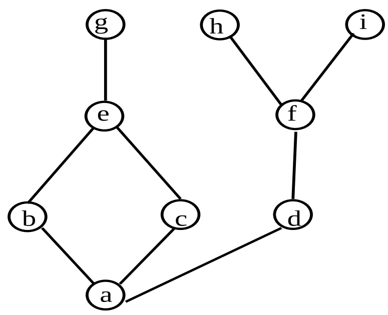
10. Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen $R \subseteq A \times A$ transitiv, reflexiv, symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen? Bestimmen Sie für diese die Klasseneinteilung. Welche Relationen sind Ordnungsrelationen?
    (a) $A = \mathbb{N}_* = \{0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n}, \ldots\}$ und $i\, R\, j \;\Leftrightarrow (i = j) \vee (\exists x \in \mathbb{N} : \mathrm{x} < \mathrm{i} \wedge \mathrm{x} < \mathrm{j})$.
    Wie üblich bezeichnen wir hier mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.
    (b) $A = \mathbb{N}_* = \{0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n}, \ldots\}$ und $R = \{(i, i+1)\, |i \in \mathbb{N}_*\}$.

11. Wir schreiben $a|b$ für die Teilerrelation:

    $$a|b \text{ („}a\text{ teilt }b\text{“)} \Leftrightarrow \text{es gibt eine ganze Zahl } x\text{, sodass } b = a \cdot x \text{ ist}$$

    Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen und welche sind Ordnungsrelationen?
    (a) Die Teilerrelation auf dem Intervall $[2, 3] = \{x \in \mathbb{R}\, |2 \leq \mathrm{x} \leq 3\}$.
    (b) Die Teilerrelation auf der Menge $\{x \in \mathbb{N}\, |\mathrm{x} \geq 2\}$.
    (c) Die Teilerrelation auf der Menge $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

12. Gegeben sei eine Partialordnung $(X, \leq)$ dargestellt durch folgendes Hasse-Diagramm.



    Bestimmen Sie das kleinste/größte Element, das Supremum und Infimum (falls vorhanden), sowie alle Maxima und Minima der Teilmenge $\{e, f\}$.

13. Auf der Menge $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Relation $R \subseteq M \times M$ definiert durch

    $$aRb \Leftrightarrow (a - b) \leq 0 \text{ und } a - b \text{ ist gerade.}$$

    (a) Zeigen Sie, dass R eine Ordnungsrelation auf M ist.
    (b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für diese Partialordnung.
    (c) Sei $Y = \{-3, -2, 0, 1, 2, 4\}$. Bestimmen Sie (falls vorhanden) das größte Element, alle minimalen Elemente und das Infimum der Menge Y.