Diskrete Mathematik, WS 2012/2013, 12. Übungsblatt

56. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M \subseteq E$ ein Matching in G. Dann gibt es ein Matching M' mit maximaler Kardinalität, das alle von M gematchten Knoten matcht.

57. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und M_1, M_2 zwei maximale Matchings bezüglich Inklusion. Dann gilt $|M_1| \leq 2|M_2|$.

58. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Zusammenhangskomponente V_i von G heißt ungerade Komponente, wenn $|V_i|$ ungerade ist. Mit $\mathrm{oc}(G)$ bezeichnet man die Anzahl der ungeraden Komponenten von G. Zeigen Sie dass für alle Mengen $S \subseteq V$ und alle Matchings M in G

$$|M| \leq \frac{1}{2}\left(|V| - \mathrm{oc}(G[V \setminus S]) + |S|\right).$$

gilt.

59. Zeigen Sie: Sei $r \geq 1$ und $G = (A \cup B, E)$ ein r-regulärer bipartiter Graph. Dann lässt sich die Kantenmenge E in r disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

60. Sei G ein bipartiter Graph, der auf beiden Seiten dieselbe Anzahl von Knoten hat. Nehmen wir an, jede nicht-leere echte Teilmenge A auf der linken Seite hat mindestens $|A| + 1$ Nachbarn auf der rechten Seite. Beweisen Sie, dass es für jede Kante e von G, ein perfektes Matching von G gibt, das die Kante e enthält.