# Relationen: Definitionen und Sätze

## 1 Allgemeine Definitionen

**Definition 1.1** *Seien $M$, $N$ Mengen. Eine Relation $R$ zwischen $M$ und $N$ ist eine Teilmenge des kartesichen Produkts $M \times N$, also $R \subseteq M \times N$. Wenn $M = N$, dann spricht man von einer Relation auf $M$. Man schreibt $aRb$ statt $(a, b) \in R$.*

**Definition 1.2** *(Eigenschaften von Relationen auf $M$)*
*Sei $M$ eine Menge und $R$ eine Relation auf $M$. Die Relation $R$ heißt*

*(1) reflexiv, falls $\forall a \in M\colon aRa$.*

*(2) symmetrisch, falls $\forall a, b \in M\colon aRb \to bRa$.*

*(3) transitiv, falls $\forall a, b, c \in M\colon aRb \wedge bRc \to aRc$.*

*(4) Äquivalenzrelation, falls $R$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

*(5) antisymmetrsich, falls $\forall a, b \in M,\ aRb \wedge bRa \to a = b$.*

*(6) Ordnungsrelation (Partialordnung), falls $R$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.*

*(7) konnex, falls $\forall a, b \in M,\ aRb \vee bRa$.*

*(8) Totalordnung, falls $R$ eine konnexe Partialordnung ist.*

*(9) asymmetrisch, falls $\forall a, b \in M,\ aRb \to \neg(bRa)$.*

**Definition 1.3** *(Eigenschaften von Relationen zwischen $M$ und $N$, $M = N$ nich ausgeschlossen)*
*Seien $M$ und $N$ Mengen und $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen $M$ und $N$. $R$ heißt*

*(1) linkstotal, falls $\forall a \in M\, \exists b \in N\colon aRb$.*

*(2) rechtstotal, falls $\forall b \in N\, \exists a \in M\colon aRb$.*

*(3) rechtseindeutig, falls $\forall a \in M\, \forall b, c \in N\colon aRb \wedge aRc \to b = c$.*

*(4) linkseindeutig, falls $\forall a, b \in M\, \forall c \in N\colon aRc \wedge bRc \to a = b$.*

*(5) eindeutig, falls $R$ rechtseindeutig und linkseindeutig ist.*

**Bemerkung:**

- Eine linkstotale, rechtseindeutige Relation entspricht einer Funktion.
- Eine surjektive Funktion ist zusätzlich noch rechtstotal.
- Eine innjektive Funktion ist zusätzlich linkseindeutig und somit eindeutig.

## 2 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen werden oft mit $\sim$ bezeichnet.

**Definition 2.1** *Sei $M$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$. Für jedes $a \in M$ heißt*

$$[a]_\sim := \{x \in M : a \sim x\}$$

*die Äquivalenzklasse von $a$ unter $\sim$. Jedes $x \in [a]_\sim$ heißt Repräsentant von $[a]_\sim$.*

**Satz 2.2** *(Partition in Äquivalenzklassen)*
*Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$. Wir bezeichnen mit $M/_\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen.*

$$M/_\sim := \{[a]_\sim : a \in M\}.$$

*Dann bilden die Äquivalenzklassen eine Partition der Menge $M$, d.h. jede Äquivalenzklasse ist nicht leer, die Äquivalenzklassen sind paarweise disjunkt und die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist gleich $M$.*

## 3 Ordnungsrelationen

Partialordnungen bezeichnet man oft mit $\preceq$, $\leq$. Die Notation $\leq$ wird generell auch dann verwendet, wenn die Menge auf der $\leq$ operiert keine Zahlenmenge ist. $\leq$ bedeutet also nicht immer die übliche „*ist kleiner als oder gleich wie*“ Relation auf Zahlenmengen.

**Definition 3.1** *Sei $M$ eine Menge und $\leq$ eine Partialordnung auf $M$. Ein Element $x \in M$ heißt:*

*(1) kleinstes Element von $M$, falls $\forall a \in M : x \leq a$.*

*(2) größtes Element von $M$, falls $\forall a \in M : a \leq x$.*

*(3) minimales Element von $M$, falls $\forall a \in M : a \leq x \to a = x$.*

*(4) maximales Element von $M$, falls $\forall a \in M : x \leq a \to a = x$.*

Wenn auf eine Menge $M$ eine Partialordnung definiert ist, dann sagen wir auch „*$M$ ist partialgeordnet*“.

**Proposition 3.2** *Sei $M$ eine partialgeordnete Menge. Dann enthält $M$ höchstens ein kleinstes Element. Analog enthält $M$ höchstens ein größtes Element.*

**Bemerkung:** Falls $m$ das einzige minimale (maximale) Element einer partialgeordneten Menge $M$ ist, so muss $m$ nicht zwangsweise das kleinste (größte)) Element in $M$ sein.

**Das Hasse-Diagramn.**
(Kleine) Endliche partialgeordnete Mengen können mit Hilfe des Hasse-Diagramms graphisch dargestellt werden. Beim Hasse-Diagramm einer partialgeordneten Menge $M$ mit Partialordnung $\leq$ werden die Elemente von M als Punkte in der Ebene oder im Raum dargestellt. Zwei Punkte $a, b \in M$ werden durch ein Geradenstuck verbunden, wenn $a \leq b$, $a \neq b$ gilt und

es kein $c \in M \setminus \{a, b\}$ gibt mit $a \leq c \leq b$. Die Richtung der Verbindung zwischen $a$ und $b$ wird so gewählt, dass „die Reihenfolge" von $a$ und $b$ zum Ausdruck gebracht wird. Zu diesem Zweck werden manchmal auch Pfeile verwendet. Die Verbindungen der Elemente mit sich selbst (Schleifen) werden nicht gezeichnet. Das Hasse-Diagramm ist natürlich zyklenfrei.

**Definition 3.3** *Sei $M$ eine partialgeordnete Menge und $N \subseteq M$.*

*(1) Ein Element $x \in M$ heißt obere Schranke für $N$, falls $\forall y \in N\colon y \leq x$. Eine Menge $N$. die eine obere Schranke besitzt, heißt nach oben beschränkt.*

*(2) Ein Element $x \in M$ heißt untere Schranke für $N$, falls $\forall y \in N\colon x \leq y$. Eine Menge $N$. die eine untere Schranke besitzt, heißt nach unten beschränkt.*

*(3) Falls die Menge der oberen Schranken von $N$ ein kleinstes Element besitzt, so heißt dieses Element Supremum von $N$. Dieses Element wird mit sup $N$ bezeichnet.*

*(4) Falls die Menge der unteren Schranken von $N$ ein größtes Element besitzt, so heißt dieses Element Infimum von $N$. Dieses Element wird mit inf $N$ bezeichnet.*

*(5) Eine Telmenge $K \subseteq M$ heißt Kette in M, falls $\forall a, b \in K : a \leq b \vee b \leq a$.*

**Definition 3.4** *Sei $M$ eine Menge. eine Partialordnung $\leq$ auf $M$ heißt Wohlordnung, wenn jede nichtleere Teilmenge $N \subseteq M$ ein kleinstes Element besitzt.*

**Bemerkung:** Eine Wohlordnung ist eine Totalordnung, aber nicht umgekehrt.

**Satz 3.5** *(Lemma von Zorn)*
*Sei $M$ eine nichtleere partialgeordnete Menge mit Partialordnung $\leq$ und mit der Eigenschaft: jede Kette $K \subseteq M$ besitzt eine obere Schnranke in $M$. Dann besitzt $M$ ein maximales Element.*

**Satz 3.6** *(Wohlordnungssatz)*
*Sei $M$ eine Menge. Es gibt eine Wohlordnung in $M$.*

**Satz 3.7** *(Das Auswahlaxiom)*
*Sei $(M_\lambda)_{\lambda \in J}$ ein System von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Funktion $f\colon J \to \cup_{\lambda \in J} M_\lambda$, sodass $\forall \lambda \in J\colon f(\lambda) \in M_\lambda$.*

**Satz 3.8** *Die Sätze 3.7, 3.5 und 3.6 sind untereinander äquivalent.*