Diskrete Mathematik SS 2011

7. Übungsblatt

59. Bestimmen Sie den Koeffizienten ...

    (a) von x^{2011} in $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^4$,

    (b) von x^4 in $(2 + 3x)^5\sqrt{1 - x}$.

60. Finden Sie die erzeugenden Funktionen für die nachstehenden Folgen. Bitte geben Sie sie in geschlossener Form an, nicht als unendliche Reihe!

    (a) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, d.h. $a_k = (1 + k)^2$, $k \in N_0$, (b) $1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$.

61. Sei a_n die Anzahl von geordneten Tripeln (i, j, k) ganzer Zahlen, so dass $i \geq 0$, $j \geq 1$ und $k \geq 1$ und $i + 3j + 3k = n$. Finden Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und bestimmen Sie eine Formel für a_n.

62. Finden Sie einen Ausdruck für das n-te Glied der durch folgende Rekursionen gegebenen Folgen. Verwenden Sie die gleiche Methode wie in der Vorlesung für die Fibonacci-Folge oder den Satz über die linearen Rekursionen (vgl. Vorlesung).

    (a) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

    (b) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

63. Lösen Sie die Rekursion $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ mit Anfangsbedingungen $a_0 = 2$, $a_1 = 8$, und bestimmen sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

64. (a) Lösen Sie die Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0$, $n \geq 1$, mit der Anfangsbedingung $a_0 = 1$.

    (b) Lösen Sie die Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \ldots + a_1 + a_0$ $(n \geq 3)$ mit $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

65. Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{1}{2}\left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n\right]$ für alle $n \geq 1$ eine ganze Zahl ist.

66. (Mini Tetris)
    Auf wie viele Arten kann man ein $n \times 2$ Rechteck mit den Steinen aus Abbildung 1 lückenlos und ohne Überlappungen belegen? Die Seitenlängen der Steine sind 1 oder 2; die Steine können um vielfache von 90^0 gedreht werden. In (b) und (c) reicht es wenn Sie die erzeugende Funktion oder eine rekursive Gleichung angeben. Bestimmen Sie auch die Größenordnung des Wachstums der Anzahl der Belegungsarten in Abhängigkeit von n, d.h. geben Sie eine asymptotische Näherung für großes n an.

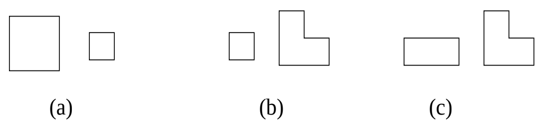

Abbildung 1: Steinmuster für Beispiel 66

67. Betrachten wir ein $n \times n$ Schachbrett und die kürzesten Wege von der linken unteren Ecke A zur rechten oberen Ecke B, die immer entlang der Seiten der quadratischen Felder verlaufen.

(a) Wieviele solche Wege gibt es?

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Wege, die nie unter die Diagonale (der Linie AB) gehen, genau die Catalan Zahl $b_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ist.

68. Auf einem Kreis sind $2n$ Punkte markiert. Wir möchten Sie zu Paaren zusammenfassen und die Paare mit Strecken verbinden, die sich gegenseitig nicht schneiden. Zeigen Sie, dass dies auf b_n Arten möglich ist, wobei b_n die Catalan Zahl $b_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ist.