Diskrete Mathematik SS 2011
6. Übungsblatt

49. (a) Zeigen Sie, dass die Formel
$$n! > \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n$$
für alle ungeraden natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

    (b) Zeigen Sie, dass für ungerade natürliche Zahlen $n \geq 3$ folgende Ungleichung gilt:
$$n! \leq \frac{n^n}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

50. Gegeben sei eine Permutation $p\colon X \to X$. Wir bezeichnen mit p^k die Permutation, die durch die k-fache Anwendung von p entsteht, d.h. $p^1 = p$ und $p^k = p \circ p^{k-1}$. Definieren Sie folgendermaßen eine Relation R auf der Menge X: xRy genau dann, wenn eine natürliche Zahl k existiert, sodaß $y = p^k(x)$. Ist R eine Äquivalenzrelation auf X? Wenn ja, lassen sich die Äquivalenzklassen von R anhand der Zyklen von p charakteriesieren? Wie?

51. Seien $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $g = (261) \circ (458) \circ (39)$ zwei Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

    (a) Stellen Sie f in Zyklenschreibweise dar.
    (b) Stellen Sie g in Standardschreibweise (als Abbildungstabelle) dar.
    (c) Berechnen Sie f^{-1}, g^2, g^3, g^{-1}, g^{999} und $f \circ g$.
    (d) Bestimmen Sie die Anzahl der Inversionen von f.
    (e) Bestimmen Sie ob f und g gerade oder ungerade sind.

52. Eine Permutation f von $\{1, 2, \ldots, n\}$ habe b_1 Zyklen der Länge 1, b_2 Zyklen der Länge 2, usw. Zeigen Sie:
$$\operatorname{sgn} f = (-1)^{b_2 + b_4 + \cdots}.$$

53. Zeigen Sie: Jede Permutation f von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die als Produkt von (nicht notwendigerweise disjunkten) Zyklen der Länge drei dargestellt werden kann, ist gerade.

54. Zeigen Sie, dass eine Permutation f von $\{1, 2, \ldots, n\}$ genau dann als Produkt disjunkter Transpositionen geschrieben werden kann, wenn $f^2 = \mathrm{id}$.

55. Die Ordnung einer Permutation π von $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist die kleinste natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$, für die $\pi^a = \mathrm{id}$ gilt, wobei id die identische Permutation ist, d.h. $\mathrm{id}(i) = i$ gilt für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Die Zyklendarstellung einer Permutation π besteht aus Zyklen mit Längen $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Zeigen Sie: Die Ordnung von π ist gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

56. Finden Sie eine Permutation f von $\{1, 2, \ldots, 30\}$, deren Ordnung gleich 2520 ist. Finden Sie eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, 10\}$, deren Ordnung maximal ist.

57. Beweisen Sie die untenstehende Gleichung für jedes $x \in \mathbb{R}$:
$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} s_{n,k} x^k$$
($s_{n,k}$ sind die Stirlingzahlen erster Art.)

58. Sei S_6 die Menge der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Lösen Sie die folgenden Gleichungen für $x \in S_6$:

(a)

$$x \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

(b)

$$x \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

(c)

$$x \circ x \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$