# Diskrete Mathematik SS 2011

## 5. Übungsblatt

42. In einer Klasse in einer Österreichischen Schule gibt es 25 SchülerInnen: 14 sprechen Spanisch, 12 Französisch, 6 sprechen Französisch und Spanisch, 5 sprechen Englisch und Spanisch, und 2 SchülerInnen sprechen alle drei Sprachen. Die 6 SchülerInnen, die Englisch sprechen, sprechen alle noch eine andere Fremdsprache. Wieviele SchülerInnen sprechen keine Fremdsprache?

43. Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MATHEMATIK so anordnen, dass die beiden T's vor beiden A's, oder beide A's vor beiden M's oder beide M's vor dem E stehen?

44. Beweisen Sie die Bonferroni-Ungleichungen (vgl. Vorlesung) für die Spezialfälle $q = 1$ und $q = 2$.

45. Was ist „faul" an den folgenden Induktiven „Beweis", dass $D_n = (n-1)!$ für alle $n \geq 2$? ($D_n$ ist die $n$-te Derangement-Zahl, vgl. Vorlesung.) Finden Sie den Fehler! Für $n = 2$ gilt die Formel also nehmen wir $n \geq 3$ an. Sei $\pi$ eine fixpunktfreie Bijektion von $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ auf $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Wir möchten Sie zu einer fixpunktfreien Bijektion von $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ ergänzen. Wir wählen eine Zahl $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und definieren $\pi'(n) = i$, $\pi'(i) = n$ und $\pi'(j) = \pi(j)$ für $j \neq i, n$. Dies definiert eine fixpunktfreie Bijektion von $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf $\{1, 2, \ldots, n\}$. Für jedes der $D_{n-1} = (n-2)!$ möglichen $\pi$'s kann der Index $i$ auf $n-1$ Arten gewählt werden. Also ist $D_n = (n-2)!(n-1) = (n-1)!$.

46. Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$D_n = n! - nD_{n-1} - \binom{n}{2} D_{n-2} - \ldots \binom{n}{n-1} D_1 - 1\,.$$

47. (Zahlpartitionen)
Seien $n$ und $k$ zwei natürliche Zahlen. Eine *ungeordnete Partition der Zahl $n$ in $k$ Summanden* ist eine Multimenge bestehend aus $k$ natürlichen Zahlen (inklusive Wiederholungen) mit Summe $n$, d.h. eine Multimenge $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, sodass $n_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq k$ und $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Die Anzahl solcher Partitionen wird mit $P_{n,k}$ bezeichnet. Per Definition gilt $P_{n,k} = 0$ für $k > n$, $k, n \in \mathbb{N}$, $P_{n,0} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $P_{0,0} = 0$. Eine *geordnete Partition der Zahl $n$ in $k$ Summanden* ist ein geordnetes $k$-Tupel bestehend aus $k$ natürlichen Zahlen (inklusive Wiederholungen) mit Summe $n$, d.h. ein geordnetes $k$-Tupel der Form $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, sodass $n_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq k$ und $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Die Anzahl solcher Partitionen wird mit $P'_{n,k}$ bezeichnet. Zum Beispiel gilt $P_{3,2} = 1$ und $P'_{3,2} = 2$.

    (a) Beweisen Sie folgende Gleichung für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$:

    $$P_{n+k,k} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{n,k-i}$$

    (b) Zeigen Sie, dass $P'_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}$ gilt für $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
    Hinweis: Schreiben Sie $n$ als Summe von $n$ Einsen und identifizieren Sie eine geordnete Partition anhand der Position der „+ " Zeichen, die die einzelnen Summanden der Partition von einander trennen.

(c) Wieviele Lösungen $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$ besitzt die Gleichung $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$?

48. (Mengenpartitionen, Stirlingzahlen zweiter Art, Bellzahlen)
Eine $k$-Partition einer $n$-elementigen Menge $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ist eine Zerlegung der Menge $A$ in genau $k$ nichtleere, disjunkte Mengen: $A = \biguplus_{i=1}^{k} A_i$ mit $A_i \neq 0$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $i \neq j$. Die Anzahl solcher Partitionen heißt *Stirlingzahl zweiter Art* und wird mit $S_{n,k}$ bezeichnet. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt klarerweise $S_{n,k} = 0$ für $k > n$ und $S_{n,0} = 0$. Per Definition gilt $S_{0,0} = 0$.

(a) Geben Sie einen kombinatorischen Beweis für die folgende rekursive Formel:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \text{ für alle } k, n \in \mathbb{N},\ n \geq k.$$

(a) Bauen Sie ein Dreieck mit den Stirlingzahlen zweiter Art analog zum Pascalschen Dreieck mit den Binomialkoeffizienten.

(c) Die *Bellzahl* $B_n$ ist die Anzahl der Möglichkeiten eine $n$-elementige Menge in nicht leere, disjunkte Mengen zu zerlegen. Anders als bei den Stirlingzahlen zweiter Art ist hier die Anzahl der zerlegenden Mengen nicht vordefiniert und kann zwischen 0 und $n$ variieren. Es gilt also $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$. Zeigen Sie, dass die Bellzahlen für $n \in N_0$ die Rekursionsgleichung

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

erfüllen.