

Diskrete Mathematik SS 2011

4. Übungsblatt

32. Die Felder eines 3×7 Schachbrettes werden beliebig mit den Farben blau und rot gefärbt. Zeigen Sie, dass es immer ein Rechteck der Größe mindestens 2×2 gibt, dessen Eckfelder einheitlich gefärbt sind.
33. Zeigen Sie durch ein kombinatorisches Argument: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.
34. (a) Beweisen Sie die Formel

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

für ein beliebiges, fixes $r \in \mathbb{N}$ durch Induktion über n . Erkennen Sie die Aussage dieser Formel für $r = 1$ wieder?

- (b) Finden Sie für die obige Formel einen kombinatorischen Beweis.
- (c) Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=2}^n i(i-1)$ und $\sum_{i=1}^n i^2$ unter Verwendung der Formel aus Punkt (a).
35. Zählen Sie die Teilmengen einer n -elementigen Menge, deren Mächtigkeit ein Vielfaches von 4 ist. Verwenden Sie dazu den Binomialsatz.
36. Ein Dominostein ist ein Rechteck bestehend aus zwei Quadraten, wobei in jedem Quadrat durch Punkte eine Zahl von 1 bis n dargestellt wird. Wie viele verschiedene Dominosteine gibt es?
37. Auf wie viele Arten kann ein König auf einem 8×8 Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen, wenn er dabei pro Zug entweder ein Feld nach rechts, ein Feld nach oben oder ein Feld (diagonal) nach rechts oben ziehen darf?
38. Wie viele natürliche Zahlen n , $n \leq 10^6$ sind weder von der Form x^2 noch x^3 , noch x^5 für ein $x \in \mathbb{N}$.
39. Wie viele monotone Funktionen $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ gibt es? Eine Funktion f heißt *monoton*, wenn die Ungleichung $i \leq j$ die Ungleichung $f(i) \leq f(j)$ impliziert.
40. Sei p eine Primzahl und seien k, n natürliche Zahlen.
- (a) Zeigen Sie, dass $\binom{p}{k}$ für $k < p$ durch p teilbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{p}$ genau dann durch p teilbar ist, wenn $\lfloor n/p \rfloor$ durch p teilbar ist.
41. Wie viele k -elementige Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ gibt es, die keine zwei aufeinander folgende Zahlen enthalten?