Diskrete Mathematik SS 2011

3. Übungsblatt

23. Finden Sie eine Erweiterung der Eulerischen Polyederformel, die auch für nicht zusammenhängende Graphen mit c Zusammenhangskomponenten gilt.

24. Zeigen Sie: Wenn der Graph G mindestens 11 Knoten besitzt, dann können G und sein Komplement G^c nicht gleichzeitig planar sein.

25. Zeigen Sie, dass der Petersen Graph nicht Hamiltonsch ist (der Petersen Graph wurde in Übungsbeispiel 2 angegeben).

26. (a) Bestimmen Sie $\chi(C_n)$, d.h. die chromatische Zahl eines Kreises mit n Knoten und n Kanten.
    (b) Bestimmen Sie die chromatische Zahl des Petersen Graphen.

27. Für einen Graphen G sei $\delta(G) := \min\{\deg(v) \colon v \in V(G)\}$ der Minimalgrad von G. Beweisen Sie, dass $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') \colon\ G' \text{ ist Teilgraph von } G\}$ gilt.
    Hinweis: Induktion über die Anzahl $|V(G)|$ der Knoten. Beim Induktionsschritt entfernen Sie einen Knoten mit minimalem Grad aus dem Graphen.

28. Ein Graph heißt *dreiecksfrei*, wenn er keinen Kreis der Länge drei als Teilgraphen enthält. Sei G ein dreiecksfreier, ebener Graph. Beweisen Sie, dass $\chi(G) \leq 4$ gilt[1].
    Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Beispiel 27.

29. (a) Bestimmen Sie $\chi'(C_n)$, d.h. den chromatischen Index eines Kreises mit n Knoten und n Kanten.
    (b) Bestimmen Sie den chromatischen Index des Petersen Graphen.

30. Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder planarer, dreiecksfreier Graph besitzt einen Knoten v mit $\deg(v) \leq 3$.

31. (a) Bestimmen Sie für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen G mit $\chi(G) = 2$ und $\chi'(G) = n$.
    (b) Ein Graph G heißt k-regulär, wenn $\deg(v) = k$ für alle Knoten $v \in V(G)$. Beweisen oder widerlegen Sie: für jeden k-regulären Graphen G gilt $\chi'(G) = k$.

---

[1] Für einen dreiecksfreien, planaren Graphen G gilt sogar $\chi(G) \leq 3$, aber der Beweis dieser schärferen Aussage ist relativ kompliziert.