Diskrete Mathematik SS 2011
2. Übungsblatt

16. Beweisen Sie, dass das Komplement eines unzusammenhängenden Graphen zusammenhängend ist.

17. Es sei $\mathcal{I} = \{[a, b] \colon a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ die Menge aller abgeschlossenen, nicht-trivialen, endlichen Intervalle in $\mathbb{R}$. Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein *Intervallgraph* wenn es eine injektive Abbildung $f \colon V \to \mathcal{I}$ gibt mit folgender Eigenschaft: $[v_1, v_2] \in E$ dann und nur dann wenn $f(v_1) \cap f(v_2) \neq \emptyset$. Welche der drei Graphen G_1, G_2, G_3 mit Knotenmenge $V(G_1) = V(G_2) = V(G_3) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und den folgendermaßen der unten angegebenen Kantenmengen ist ein Intervallgraph? Kann ein Intervallgraph einen Kreis mit Länge $l \geq 4$ als induzierten Subgraphen enthalten?

$$E(G_1) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d, g\}\big\}$$

$$E(G_2) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, f\}, \{e, g\}\big\} \text{ und}$$

$$E(G_3) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{c, f\}, \{b, g\}\big\} \text{ ?}$$

18. (Ein Kriminalrätsel) An dem Tag, an dem das wertvolle Buch gestohlen wurde, haben nur sechs Professoren die Bibliothek betreten. Jeder von ihnen hat die Bibliothek nur einmal besucht und einige Zeit darin verbracht. Wenn zwei von ihnen gleichzeitig in der Bibliothek waren, dann hat immer mindestens einer von ihnen den anderen bemerkt. Inspektor Brown befragte die Professoren Alfred, Berthold, Charlotta, David, Eduard und Ida und sammelte die folgenden Informationen:

    - Prof. Alfred sagte, dass er Berthold und Eduard in der Bibliothek gesehen hat.
    - Berthold behauptete, dass er Alfred und Ida gesehen hat.
    - Charlotta sah angeblich David und Ida.
    - David gab an, Alfred und Ida gesehen zu haben.
    - Eduard bezeugte, dass er Berthold und Charlotta getroffen hat.
    - Ida sagte, dass sie Charlotta und Eduard gesehen hat.

    Inspektor Brown weiß nun, dass genau einer der ProfessorInnen gelogen hat! Bestimmen Sie unter dieser Annahme wer gelogen hat.

19. Eine offene Euler-Tour in einem Graphen ist ein Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten verschieden sind. Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass ein Graph eine offene Euler-Tour enthält. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an den beiden Graphen in Abbildung 1.

20. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *zufällig Eulersch* vom Knoten v_0 aus, wenn jede maximale Tour, die bei v_0 startet, auch eine geschlossene Eulersche Tour in G ist. Das heißt, das jeder beim Knoten v_0 startende und folgendermaßen konstruierter Weg eine Eulersche Tour ist. In der ersten Iteration is v_0 der aktuelle Knoten. In jedem iterativen Schritt wird der Weg um eine *beliebige* im Weg noch nicht vorkommende und mit dem aktiven Knoten v inzidierende Kante $u = \{v, w\}$ verlängert. Danach wird w der aktuelle Knoten. Diese Prozedur wird so oft wie möglich wiederholt.

    (a) Zeigen Sie, dass die Graphen in Abbildung 2a und 2b zufällig Eulersch vom Knoten v_0 aus sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Graphen in Abbildung 3a und 3b nicht zufällig Eulersch vom Knoten v_0 aus sind.

(c) Beweisen Sie die folgende Charakterisierung zufällig Eulersche Graphen. Eine zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, dessen Knoten alle geraden Grad haben, ist genau dann von einem Knoten v_0 aus zufällig Eulersch, wenn der Graph $(V \setminus \{v_0\}, \{e \in E \colon v_0 \notin e\})$ keinen Kreis enthält.

21. Für einen Graphen $G = (V, E)$ wird der so genannte *Kantengraph von G* mit $L(G)$ (Englisch *line graph*) bezeichnet: $L(G) = (E, \{\{e, e'\} \colon e \cap e' \neq \emptyset\})$. Sind die folgenden Aussagen für jeden Graphen G wahr?

    (a) G ist genau dann zusammenhängend, wenn $L(G)$ zusammenhängend ist.

    (b) G ist genau dann Eulersch, wenn $L(G)$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

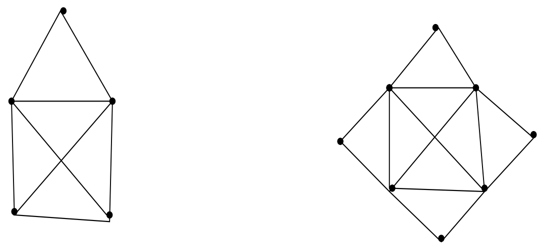
22. Der vollständige bipartite Graph $K_{a,b}$ besteht aus der Knotenmenge $A \cup B$ mit $|A| = a \geq 1$ und $|B| = b \geq 1$, sodass $A \cap B = \emptyset$ und aus allen Kanten $\{a, b\}$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

    (a) Wieviele Kanten hat $K_{a,b}$?

    (b) Charakterisieren Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, für die $K_{a,b}$ ein Baum ist.

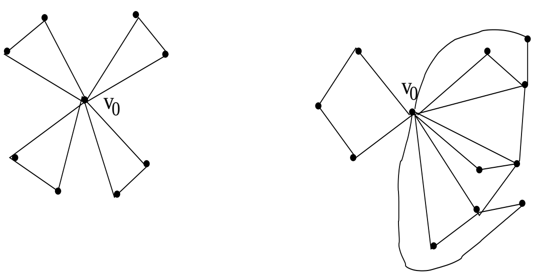
    (c) Charakterisieren Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, für die $K_{a,b}$ einen Eulerschen Kreis besitzt.

    (d) Charakterisieren Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, für die $K_{a,b}$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.



(a) (b)

Abbildung 1: Graphen für Aufgabe 19



(a) (b)

Abbildung 2: Graphen für Aufgabe 20a

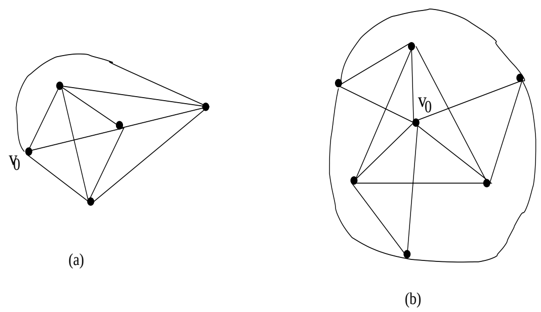


Abbildung 3: Graphen für Aufgabe 20b