**Diskrete Mathematik SS 2011**

**1. Übungsblatt**

1. (a) Zeichnen Sie alle paarweise nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten. Welche davon sind zusammenhängend?

   (b) Finden Sie alle nicht-zusammenhängenden Graphen mit $\leq 6$ Knoten, in denen jeder Knoten den Grad 2 hat.

2. (Der Petersen-Graph)

   (a) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen den zwei Graphen in Abbildung 1 an.

   (b) Zeigen Sie, dass beide Graphen in Abbildung 1 isomorph zu dem folgenden Graphen sind: Die Knotenmenge ist $\binom{\{1,2,\ldots,5\}}{2}$ (ungeordnete Zahlenpaare) und zwei Knoten $\{i,j\}$ und $\{k,l\}$ bilden genau dann eine Kante, wenn $\{i,j\} \cap \{k,l\}) = \emptyset$ gilt.

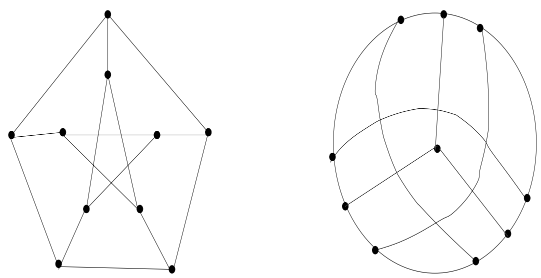

Abbildung 1: Zwei isomorphe Graphen, darunter der Petersen Graph (links).

3. Ein Automorphismus eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Isomorphismus zwischen $G$ und $G$, d.h. eine Bijektion $f \colon V \to V$, so dass genau dann $\{u, v\} \in E$ wenn $\{f(u), f(v)\} \in E$. Ein Graph heißt asymmetrisch, wenn er als Automorphismus nur die Identische Abbildung zulässt, d.h. jene Abbildung, die jeden Knoten auf sich selbst abbildet.

   (a) Finden Sie ein Beispiel eines asymmetrischen Graphen mit mindestens 2 Knoten.

   (b) Zeigen Sie, dass es keinen asymmetrischen Graphen $G$ mit $1 < |V(G)| \leq 5$ gibt.

4. (a) Welche größtmögliche Kantenzahl besitzt ein nicht-zusammenhängender Graph mit $n$ Knoten?

   (b) Beweisen Sie: Wenn in einem Graphen $G$ mit $2n$ Knoten jeder Knoten einen Grad $\geq n$ besitzt, dann ist $G$ zusammenhängend.

5. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^C = (V, E')$, wobei $E'$ genau jene Kanten enthält, die nicht in $E$ vorkommen.

   (a) Zeigen Sie: Wenn zwei Graphen isomorph sind, so sind auch ihre Komplemente isomorph.

   (b) Finden Sie einen Graphen, der zu seinem Komplement isomorph ist.

   (c) Kann ein Graph mit 7 Knoten zu seinem Komplement isomorph sein?

   (d) Wie viele Kanten hat ein Graph mit $n$ Knoten, der zu seinem Komplement isomorph ist?

6. Sieben Mathematikstudierende fahren in die Ferien. Jeder von Ihnen schreibt Ansichtskarten an drei seiner sechs Kollegen. Ist es möglich, dass jeder Studierende genau von denjenigen Kollegen eine Karte bekommt, denen er geschrieben hat?

7. (a) Als Gradfolge eines Graphen bezeichnet man die aufsteigend sortierte Folge seiner Knotengrade. Die Gradfolge eines Baumes sei $1, \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. *Wieviele Blätter* besitzt der Baum?

   (b) Bestimmen Sie alle Bäume mit $n$ Knoten, die genau 2 Blätter besitzen.

8. Beweisen oder widerlegen Sie: Zwei zusammenhängende Graphen mit identischen Gradfolgen sind isomorph.

9. Für welche natürliche Zahlen $n$ gilt die folgende Aussage: Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält zwei Knoten mit gleichem Grad?

10. Finden Sie alle nicht-isomorphen Bäume mit sechs Knoten.

11. Wieviele Knoten mit Grad drei kann ein Baum $G = (V, E)$ mit $|V| = 12$ höchstens besitzen?

12. Bestimmen Sie alle Bäume, deren Komplement nicht zusammenhängend ist.

13. Es seien $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ natürliche Zahlen, wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es existiert ein Baum mit Gradfolge $d_1, d_2, \ldots, d_n$ dann und nur dann wenn $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

14. Gegeben sei ein $4 \times 4$ Schachbrett, aus dem der folgende Graph $G = (V, E)$ erzeugt wird. Die Knoten entsprechen den Feldern des Schachbrettes. Die Kante $\{a, b\}$ existiert genau dann wenn ein Springer in einem Zug vom Feld $a$ zum Feld $b$ gelangen kann.
    Zeigen Sie, dass dieser Graph $G$ (a) bipartit und (b) zusammenhängend ist. Kann der Graph durch Wegnahme eines einzigen Feldes unzusammenhängend gemacht werden?

15. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $\deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ und $|V| \geq 3$ einen Knoten $v_0$ enthält, der zu mindestens zwei Blättern benachbart ist.