

## Diskrete Mathematik SS 2008

### 8. Übungsblatt

53. Betrachten wir ein  $n \times n$  Schachbrett und die kürzesten Wege von der linken unteren Ecke  $A$  zur rechten oberen Ecke  $B$ , die immer entlang der Seiten der quadratischen Felder verlaufen.
- (a) Wieviele solche Wege gibt es?
  - (b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Wege, die nie unter die Diagonale (der Linie  $AB$ ) gehen, genau die Catalan Zahl  $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  ist.
54. Auf einem Kreis sind  $2n$  Punkte markiert. Wir möchten Sie zu Paaren zusammenfassen und die Paare mit Strecken verbinden, die sich gegenseitig nicht schneiden. Zeigen Sie, dass dies auf  $b_n$  Arten möglich ist, wobei  $b_n$  die Catalan Zahl  $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  ist.
55. Wir betrachten die Anzahl  $\bar{p}_n$  von (ungeordneten) Partitionen einer natürlichen Zahl  $n$  in natürlichen Zahlen wo alle Summanden paarweise verschieden sind.
- (a) Drücken Sie  $\bar{p}_n$  als Koeffizienten von  $x^n$  in einem geeigneten Polynom aus.
  - (b) Zeigen Sie mit der Methode aus dem Beweis von Satz 4.5, dass  $\bar{p}_n \leq e^{2\sqrt{n}}$  gilt,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
56. Betrachten Sie einen Zufallsweg: wir starten bei der Zahl 0 und gehen in jedem Schritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit von  $i$  nach  $i + 1$  oder  $i - 1$ .
- (a) Beweisen Sie, dass wir mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann zur 0 zurückkommen.
  - (b) Beweisen Sie, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 jede Zahl  $k$  mindestens einmal besucht wird.