

Diskrete Mathematik SS 2008

7. Übungsblatt

44. Bestimmen Sie den Koeffizienten ...
- (a) von x^{15} in $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$,
 (b) von x^4 in $(2 + 3x)^5 \sqrt{1-x}$.
45. Finden Sie die erzeugenden Funktionen für die nachstehenden Folgen. Bitte geben Sie sie in geschlossener Form an, nicht als unendliche Reihe!
- (a) $1^2, 2^2, 3^2, \dots$, d.h. $a_n = (n+1)^2$, $k \in \mathbb{N}_0$, (b) $1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$
46. Sei a_n die Anzahl von geordneten Tripeln (i, j, k) ganzer Zahlen, so dass $i \geq 0$, $j \geq 1$ und $k \geq 1$ und $i + 3j + 3k = n$. Finden Sie die erzeugende Funktion der Folge (a_0, a_1, a_2, \dots) und bestimmen Sie eine Formel für a_n .
47. Bestimmen Sie die Anzahl der 0-1-Folgen der Länge n , die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten.
48. Finden Sie einen Ausdruck für das n -te Glied der durch folgende Rekursionen gegebenen Folgen. Verwenden Sie die gleiche Methode wie in der Vorlesung für die Fibonacci-Folge oder den Satz über die linearen Rekursionen (Satz 4.3 in der Vorlesung).
- (a) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$),
 (b) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).
49. Lösen Sie die Rekursion $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ mit Anfangsbedingungen $a_0 = 2$, $a_1 = 8$, und bestimmen sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
50. (a) Lösen Sie die Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0$ mit der Anfangsbedingung $a_0 = 1$.
 (b) Lösen Sie die Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots + a_1 + a_0$ ($n \geq 3$) mit $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.
51. Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{1}{2}[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n]$ für alle $n \geq 1$ eine ganze Zahl ist.
52. (Mini Tetris)
 Auf wie viele Arten kann man eine $n \times 2$ Rechteck mit den folgenden Steinen lückenlos und ohne Überlappungen belegen? Die Seitenlängen der Steine sind 1 oder 2; die Steine können um vielfache von 90° gedreht werden. In (b) und (c) reicht es wenn Sie die erzeugende Funktion oder eine rekursive Gleichung im Sinne von Satz 4.3 aus der Vorlesung angeben. Bestimmen Sie auch die Größenordnung des Wachstums der Anzahl der Belegungsarten in Abhängigkeit von n , d.h. geben Sie eine asymptotische Näherung für großes n an.

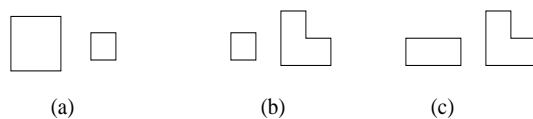


Abbildung 1: Steinmuster für Beispiel 52