

## Diskrete Mathematik SS 2008

### 5. Übungsblatt

31. Finden Sie alle nicht-isomorphen Bäume mit sechs Knoten.
32. Wieviele Knoten mit Grad drei kann ein Baum  $G = (V, E)$  mit  $|V| = 12$  höchstens besitzen?
33. Bestimmen Sie alle Bäume deren Komplement nicht zusammenhängend ist.
34. Es seien  $d_1, d_2, \dots, d_n$  natürliche Zahlen. Zeigen Sie: Es existiert ein Baum mit Gradfolge  $d_1, d_2, \dots, d_n$  dann und nur dann wenn  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$ .
35. Gegeben sei ein  $4 \times 4$  Schachbrett, aus dem der folgende Graph  $G = (V, E)$  erzeugt wird. Die Knoten in  $V$  entsprechen den Feldern des Schachbrettes. Die Kante  $\{a, b\}$  existiert genau dann wenn ein Springer in einem Zug vom Feld  $a$  zum Feld  $b$  gelangen kann.  
Zeigen Sie, dass dieser Graph  $G$  (a) bipartit und (b) zusammenhängend ist. Kann der Graph durch Wegnahme eines einzigen Feldes unzusammenhängend gemacht werden?
36. Es sei  $\mathcal{I} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  die Menge aller abgeschlossenen, nicht-trivialen, endlichen Intervalle in  $\mathbb{R}$ . Ein Graph  $G = (V, E)$  ist ein *Intervallgraph* wenn es eine injektive Abbildung  $f: V \rightarrow \mathcal{I}$  gibt mit folgender Eigenschaft:  $[v_1, v_2] \in E$  dann und nur dann wenn  $f(v_1) \cap f(v_2) \neq \emptyset$ . Welche der drei Graphen  $G_1, G_2, G_3$  mit Knotenmenge  $V(G_1) = V(G_2) = V(G_3) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  und den folgendermaßen gegebenen Kantenmengen ist ein Intervallgraph

$$E(G_1) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d, g\}\}$$

$$E(G_2) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, f\}, \{e, g\}\} \text{ und}$$

$$E(G_3) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{c, f\}, \{b, g\}\} ?$$

37. (Ein Kriminalrätsel) An dem Tag, an dem das wertvolle Buch gestohlen wurde, haben nur sechs Professoren die Bibliothek betreten. Jeder von ihnen hat die Bibliothek nur einmal besucht und einige Zeit darin verbracht. Wenn zwei von ihnen gleichzeitig in der Bibliothek waren, dann hat immer mindestens einer von ihnen den anderen bemerkt. Inspektor Brown befragte die Professoren Alfred, Berthold, Charlotta, Daniel, Eduard und Ida und sammelte die folgenden Informationen:

- Prof. Alfred sagte, dass er Berthold und Eduard in der Bibliothek gesehen hat.
- Berthold behauptete, dass er Alfred und Ida gesehen hat.
- Charlotta sah angeblich Daniel und Ida.
- Daniel gab an, Alfred und Ida gesehen zu haben.
- Eduard bezeugte, dass er Berthold und Charlotta getroffen hat.
- Ida sagte, dass sie Charlotta und Eduard gesehen hat.

Einer der Professoren hat gelogen!! Wer war es?

38. Der vollständige bipartite Graph  $K_{a,b}$  besteht aus der Knotenmenge  $A \cup B$  mit  $|A| = a \geq 1$  und  $|B| = b \geq 1$ , sodass  $A \cap B = \emptyset$  und aus allen Kanten  $\{a, b\}$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ .

- (a) Wieviele Kanten hat  $K_{a,b}$ ?

- (b) Charakterisieren Sie alle Paare  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ , für die  $K_{a,b}$  ein Baum ist.
  - (c) Charakterisieren Sie alle Paare  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ , für die  $K_{a,b}$  einen Eulerschen Kreis besitzt.
  - (d) Charakterisieren Sie alle Paare  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ , für die  $K_{a,b}$  einen Hamiltonschen Kreis besitzt.
  - (e) Charakterisieren Sie alle Paare  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ , für die  $K_{a,b}$  planar ist.
39. Finden Sie eine Erweiterung des Satzes von Euler, die auch für nicht zusammenhängende Graphen mit  $c$  Zusammenhangskomponenten gilt.
40. Zeigen Sie: Wenn  $G$  ein Graph mit mindestens 11 Knoten ist, dann können  $G$  und sein Komplement nicht gleichzeitig planar sein.