

Diskrete Mathematik SS 2008

4. Übungsblatt

24. (a) Zeichnen Sie alle paarweise nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten. Welche davon sind zusammenhängend?
- (b) Finden Sie alle nicht-zusammenhängenden Graphen mit ≤ 6 Knoten, in denen jeder Knoten den Grad 2 hat.
25. (a) Was ist die größtmögliche Kantenzahl in einem nicht-zusammenhängenden Graphen mit n Knoten?
- (b) Beweisen Sie: Wenn in einem Graphen G mit $2n$ Knoten jeder Knoten einen Grad $\geq n$ besitzt, dann ist G zusammenhängend.
26. Beweisen Sie, dass jeder Graph mit n Knoten und m Kanten mindestens $n - m$ Zusammenhangskomponenten hat.
27. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^C = (V, E')$, wobei E' genau jene Kanten enthält, die nicht in E vorkommen.
- (a) Zeigen Sie: Wenn zwei Graphen isomorph sind, so sind auch ihre Komplemente isomorph.
- (b) Finden Sie einen Graphen, der zu seinem Komplement isomorph ist.
- (c) Kann ein Graph mit 7 Knoten zu seinem Komplement isomorph sein?
- (d) Wie viele Kanten hat ein Graph mit n Knoten der zu seinem Komplement isomorph ist?
28. Sieben Mathematikstudenten fahren in die Ferien. Jeder von Ihnen schreibt Ansichtskarten an drei seiner sechs Kollegen. Ist es möglich, dass jeder Student genau von denjenigen Kollegen eine Karte bekommt, denen er geschrieben hat?
29. Josef, Manfred, Rudolf, Stefan, Theo und Willi telefonieren täglich mit einander und erzählen einander den neuesten Tratsch. Josef spricht jeden Tag mit Manfred und Willi, Manfred spricht mit Joseph und Rudolf, Rudolf spricht mit Manfred und Theo, Stefan spricht mit Manfred, Rudolf, Theo und Willi. Theo spricht mit Rudolf, Stefan und Willi. Willi spricht mit Joseph, Stefan und Theo. Alle Gerüchte, die jemand an einem Tag erfährt, erzählt er am Tag darauf weiter.
- (a) Modellieren Sie diese Gerüchtebörse als (gerichteten) Graphen.
- (b) Wieviele Tage dauert es, bis dass ein Gerücht von Josef zu Stefan kommt? Wer wird es Stefan erzählen?
- (c) Wieviele Tage dauert es höchstens, bis dass sich ein Gerücht vollständig verbreitet hat?
- (d) Untersuchen Sie, wie sich die maximale Verbreitungsdauer verändern kann, wer zwei der Teilnehmer sich zerstreiten und nicht mehr miteinander telefonieren.
30. (a) Als Gradfolge eines Graphen bezeichnet man die aufsteigend sortierte Folge seiner Knotengrade. Die Gradfolge eines Baumes sei $1, \dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. *Wieviele Blätter* besitzt der Baum? Ein *Blatt* ist ein Knoten mit Grad 1 in einem Baum.
- (b) Zeigen Sie: Jeder Baum hat mindestens zwei Blätter. Bestimmen Sie alle Bäume mit n Knoten, die genau 2 Blätter besitzen.