Diskrete Mathematik SS 2008

3. Übungsblatt

17. Wieviele Untergruppen hat die symmetrische Gruppe S_3? Wieviele davon sind zyklische Gruppen?

18. Seien $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $g = (261) \circ (458) \circ (39)$ Permutationen der Menge $\underline{9} = \{1, 2, \dots, 9\}$.

    (a) Stellen Sie f in Zyklenschreibweise dar.

    (b) Stellen Sie g in Standardschreibweise (als Abbildungstabelle) dar.

    (c) Berechnen Sie f^{-1}, g^2, g^3, g^{-1},g^{999} und $f \circ g$.

    (d) Bestimmen Sie $sgn(f)$ und $sgn(g)$.

19. Zeigen Sie: Eine Permutation $f \in S_n$ kann genau dann als Produkt disjunkter Transpositionen geschrieben werden, wenn $f^2 = id$ gilt.

20. Die Zyklendarstellung einer Permutation α besteht aus k Zyklen mit jeweiligen Längen n_1, n_2, …,n_k. Zeigen Sie, dass die Ordnung von α gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) von n_1,n_2, …,n_k ist.

21. Die Zyklendarstellung einer Permutation α besteht aus k Zyklen mit jeweiligen Längen n_1,n_2, …,n_k. Zeigen Sie, dass $sgn(\alpha) = (-1)^{n_1+n_2+\dots n_k+k}$ gilt.

22. (Direkte Produkte)
    Sei $(G_j)_{j\in J}$ ein System von Gruppen und sei $\prod_{j\in J} G_j := \Big\{(g_j)_{j\in J} \colon g_j \in G_j\Big\}$. Die innere Abbildung $\bullet$ in $\prod_{j\in J} G_j$, die durch $(g_j)_{j\in J} \bullet (h_j)_{j\in J} = (g_j h_j)_{j\in J}$ definiert wird, heißt direktes Produkt der $(G_j)_{j\in J}$.
    Weiters seien die Projektionen π_k folgendermaßen gegeben:

    $$\pi_k \colon \prod_{j\in J} G_j \to G_k, \text{ sodass } \pi_k\big((g_j)_{j\in J}\big) = g_k \ , \ \forall (g_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} G_j \ , \forall k \in J.$$

    Zeigen Sie:

    (a) $\big(\prod_{j\in J} G_j \,, \bullet\big)$ ist eine Gruppe.

    (b) π_k, $k \in J$, sind Gruppenepimorphismen.

    (c) Sei H eine Gruppe und seinen $f_j \colon H \to G_j$, $\forall j \in J$, Homomorphismen. Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $f \colon H \to \prod_{j\in J} G_J$, für den $\pi_j \circ f = f_j$, $\forall j \in J$ gilt.

23. (Direkte Summen)
    Sei $(G_j)_{j\in J}$ ein System von Gruppen und sei *das schwache Produkt* folgendermaßen definiert:

    $$\prod_{j\in J}{}^{W} G_j := \Big\{(g_j)_{j\in J} \colon g_j \in G_j \text{ und } g_j \neq e_{G_j} \text{ nur für endlich viele } j \in J\Big\}.$$

Falls alle G_j kommutativ, dann wird $\displaystyle\prod_{j\in J}{}^W G_j$ *direkte Summe* genannt und mit $\sum_{j\in J} G_j$ bezeichnet.

Die Abbildungen $\epsilon_k\colon G_k \to \displaystyle\prod_{j\in J}{}^W G_j$, sodass

$$\epsilon_k(g_k) = (g_j)_{j\in J} \text{ mit } g_j = \begin{cases} g_k & j = k \\ e_{G_j} & j \neq k \end{cases}, \ \forall g_k \in G_k$$

heißen kanonische Einbettungen. Zeigen Sie:

(a) $\prod_{j\in J}{}^W G_j$ ist ein Normalteiler von $\prod_{j\in J} G_j$.

(b) ϵ_j, $j \in J$, sind Gruppenmonomorphismen.

(c) Sei H eine kommutative Gruppe und seien $f_j\colon G_j \to H$, $\forall j \in J$, Homomorphismen. Wenn alle G_j, $j \in J$, kommutativ, dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $f\colon \sum_{j\in J} G_j \to H$, der den Gleichungen $f_j = f \circ \epsilon_j$, $\forall j \in J$, genügt.