Diskrete Mathematik SS 2008

2. Übungsblatt

10. Charakterisieren Sie alle Mengen $G \subseteq \mathbb{Z}$, für die das Paar $(G, \circ)$ mit $x \circ y = \max\{x, y\}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, eine Gruppe bildet.

11. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:
Es existiert eine Gruppe $(G, \circ)$ mit $|G| = 4$ und einem Element $x \in G$, sodass $\forall y \in G$ $x \circ y = y^{-1}$.

12. Die Operationen $*$ und $\oplus$ auf der Menge $\mathbb{R}$ sind folgerndermaßen definiert:
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a * b = a + b + 2$ und $a \oplus b = a + b - 2$.

    (a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, *)$ und $(\mathbb{R}, \oplus)$ Gruppen sind. Geben Sie die neutralen Elemente an.

    (b) Finden Sie einen Isomorphismus f zwischen den beiden Gruppen.

13. Seien N, K, G Gruppen und $N \trianglelefteq G$ und $K \trianglelefteq G$. Wenn $N \cap K = \{e\}$ und $NK = G$, wobei $NK = \{n \cdot k \colon n \in N, k \in K\}$ und $\cdot$ der Operator in G ist, dann sind G/N und K isomorph. (Notation: $G/N \cong K$.)

14. Sei G eine Gruppe und $Z(G) = \{g \in G \colon \forall x \in G \;\; xg = gx\}$. $Z(G)$ heißt *Zentrum* von G. Zeigen Sie, dass $Z(G) \trianglelefteq G$.

15. Sei G eine Gruppe. Für jedes $g \in G$ sei $\phi_g \colon G \to G$ durch $\phi_g(x) = g^{-1}xg$ definiert, und $Inn(G) = \{\phi_g \colon g \in G\}$. Zeigen Sie:

    (a) Für jedes g ist ϕ_g ein Automorphismus von G.

    (b) $Inn(G)$ ist eine Untergruppe von $Aut(G)$ und $Inn(G) \cong G/Z(G)$.
    ($Z(G)$ wurde in Beispiel 14 definiert.)

16. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$, wobei $+$ die herkömmliche Addition ist.