Diskrete Mathematik SS 2008

1. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie welche der folgenden Verknüpfungen $\circ$ auf den reellen Zahlen assoziativ bzw. kommutativ sind:

   (a) $x \circ y = -x - y$

   (b) $x \circ y = |x| + y$

   (c) $x \circ y = |x| + |y|$

   (d) $x \circ y = x + y + xy$

   (e) $x \circ y = \max\{x, y\}$

   (f) $x \circ y = \max\{x, 8\}$

2. Seien $r, s \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen. Wir definieren die Operation $\circ$ durch $x \circ y = rx + sy$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$. Unter welchen Bedingungen besitzt $(\mathbb{Z}, \circ)$ ein neutrales Element?

3. Ein Element mit $a \circ a = a$ heißt *idempotent*. Ein Element mit $a \circ a = e$ heißt *nilpotent*. Beweisen Sie:

   (a) Die Menge aller idempotenten Elemente einer kommutativen Halbgruppe (eines kommutativen Monoids) bildet eine Unterhalbgruppe (bzw. ein Untermonoid).

   Definition der Unterhalbgruppe: Sei $T \subseteq H$ eine Teilmenge der Trägermenge H einer Halbgruppe $(H, \circ)$. $(T, \circ)$ ist eine Unterhalbgruppe der Halbgruppe $(H, \circ)$ falls $\forall a, b \in T, a \circ b \in T$.

   Definition des Untermonoids: Sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge der Trägermenge M eines Monoids $(M, \circ, e)$. $(T, \circ)$ ist ein Untermonoid des Monoids $(M, \circ, e)$ falls $\forall a, b \in T, a \circ b \in T$ und $e \in T$.

   (b) Die Menge aller nilpotenten Elemente eines kommutativen Monoids bildet ein Untermonoid.

4. Welche der folgenden Strukturen $(G, \circ)$ bilden eine Gruppe:

   (a) $G = \{1, -1, i, -i\}$ und $\circ = \cdot$.

   (b) G ist die Menge aller 2×2 Matrizen mit Determinante $\neq 0$ und $\circ$ ist die übliche Matrizenmultiplikation.

   (c) $G = \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ und $\circ = \oplus$ (exclusive or).

   (d) $G = \{10^n : n \in \mathbb{Z}\}$ und $\circ = \cdot$.

5. Beweisen oder wiederlegen Sie die untestehenden Aussagen:

   (a) Jede Gruppe hat mindestens eine echte Untergruppe.

   (b) Jede Gruppe $(G, \circ)$ mit $|G| = 3$ ist kommutativ.

   (c) Die Vereinigung zweier Untergruppen der Gruppe G ist eine Untergruppe von G.

   (d) Der Schnitt zweier Untergruppen der Gruppe G ist eine Untergruppe von G.

6. Sei $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ die Menge der Restklassen modulo n. Wir definieren eine innere Verknüpfung $+(\text{mod } n)$ in $\mathbb{Z}_n$ als $[a] + (\text{mod } n)[b] = [a + b]$, $\forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_n$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $+(\text{mod } n)$ wohldefiniert ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_n, +(\text{mod } n))$ eine kommutative Gruppe ist. Diese Gruppe heißt *die additive Gruppe der Restklassen mod n*. Welches Element ist das neutrale Element? Welches Element ist das Inverse zu $[x]$, $x = 0, 1, \dots, n-1$?

   (c) Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente der Gruppe $(\mathbb{Z}_{14}, +(\text{mod } 14))$.

(d) Bestimmen Sie alle nicht trivialen Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{14}, +(\text{mod } 14))$. Welche dieser Untergruppen ist ein Normalteiler?

(e) Sei $\cdot(\text{mod } n)$ (die Multiplikation modulo n) eine folgendermaßen definierte Verknüpfung in $\mathbb{Z}_n$: $[a] \cdot (\text{mod } n)[b] = [ab]$. Zeigen Sie, dass $\cdot(\text{mod } n)$ eine wohldefinierte inneren Verknüpfung in $\mathbb{Z}_n$ ist.

(f) Ist $(\mathbb{Z}_n, \cdot(\text{mod } n))$ eine Halbgruppe, Gruppe?

7. Betrachten Sie die Menge $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\}$ mit der Verknüpfung $(v, w) \circ (x, y) = (vx, vy + w)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe bildet. Wie lautet das neutrale Element?

   (b) Bestimmen sie alle Elemente der Ordnung 2.

   (c) Zeigen Sie, dass unendlich viele Elemente in G eine unendliche Ordnung haben.

   (d) Zeigen Sie, dass kein Element in G eine ungerade Ordnung hat.

8. Sei W der Würfel mit Koordinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ und G die Menge jener orthogonalen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^3$, die den Würfel invariant lassen, d.h.

$$G = \{F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon F \text{ orthogonal und } F(W) = W\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge O_3 der orthogonalen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^3$ mit der üblichen Verknüpfungsoperation für Abbildungen eine Gruppe bildet.

   (b) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von O_3 ist.

   (c) Sei H die Menge jener Abbildungen, die außer dem Würfel auch den Punkt $(1, 1, 1)$ invariant lassen. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist.

   (d) Bestimmen Sie die Rechts- und Linksnebenklassen von G bezüglich H.

9. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, wobei $|G|$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass G eine zyklische Gruppe ist. Bestimmen Sie alle Untergruppen von G.