Diskrete Mathematik 31.1.2009

Musterlösung

1.a Gesucht $p \in S_{20}$ Ordnung$(p) = 252 = 7 \cdot 4 \cdot 9$

$$\boxed{p = \underbrace{(1\,2\,3\,4)}_{z_1}\underbrace{(5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)}_{z_2}\underbrace{(12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\,20)}_{z_3}}$$

$$\text{Ordnung}(p) = \text{kgV}(\text{Ordnung}(z_1), \text{Ordnung}(z_2), \text{Ordnung}(z_3))$$
$$= \text{kgV}(\text{Länge}(z_1), \text{Länge}(z_2), \text{Länge}(z_3))$$
$$= \text{kgV}(4, 9, 7) = 252$$

1b Gesucht $p \in S_8$ mit maximaler Ordnung

Sei $p = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots z_k$ die Zyklendarstellung von p.

Sei l die Anzahl Zyklen mit Länge 1.

$l = 0 \vee l = 1 \vee l = 2 \ldots \vee l = 8$

$l = 1$ $k-1$ disjunkte Zyklen mit Gesamtlänge 7

1 Zyklus Länge 7 Ordnung$(p) = \text{kgV}(7,1) = 7$

2 Zyklen Länge

2, 4 — " — $\text{kgV}(2,4,1) = 4$

3, 3 — " — $\text{kgV}(1,3,3) = 3$

3 Zyklen Länge

2, 2, 3 — " — $\text{kgV}(2,2,3,1) = 3$

$l = 2$ $k-2$ disjunkte Zyklen mit Gesamtlänge 6

1 Zyklus Länge 6 Ordnung $= \text{kgV}(1,6) = 6$

2, 4

2 Zyklen Länge 2,4 kgV(2,4,1) = 4 = Ordnung(p)

3,3 kgV(3,3,1) = 3 = – " –

1,5 kgV(1,5,1) = 5 = – " –

3 Zyklen Länge 2,2,2 kgV(2,2,2,1) = 2 = Ordnung(p)

l = 3 k-3 disjunkte Zyklen mit Gesamtlänge 5

1 Zyklus Länge 5 Ordnung(p) = kgV(5,1) = 5

2 Zyklen Länge 2,3 Ordnung(p) = kgV(2,3,1) = 6

l = 4 k-4 disjunkte Zyklen mit Gesamtlänge 4

1 Zyklus Länge 4 Ordnung(p) = kgV(1,4) = 4

2 Zyklen Länge 2,2 – " – = kgV(2,2,1) = 2

l = 5 k-5 disjunkte Zyklen mit Gesamtlänge 3

1 Zyklus Länge 3 Ord(p) = kgV(3,1) = 3

l = 6 k-6 disjunkte Zyklen mit Ges. Länge 2

1 Zyklus Länge 2 Ord(p) = kgV(2,1) = 2

l = 0 k disjunkte Zyklen mit Ges. Länge 8

1 Zyklus Länge 8 Ordn(p) = kgV(8) = 8

2 Zyklen Länge 2,6 – " – kgV(2,6) = 6

3,5 – " – $\boxed{\text{kgV}(3,5) = 15}$

4,4 – " – kgV(4,4) = 4

3 Zyklen Länge 2,2,4 – " – kgV(2,4,4) = 4

2,3,3 kgV(2,3,3) = 6

4 Zyklen Länge 2,2,2,2 – " – kgV(2,2,2,2) = 2

p bestehend aus 2 Zyklen mit Länge 3 und 5 hat max. Ordnung z.B. (1 2 3)(4 5 6 7 8)

2 $G=(V,E)$ $|V|=n$

$d(v)=k \quad \forall v\in V$

z.z. $\chi(G)\geq\left\lceil\frac{n}{n-k}\right\rceil$

Betrachten wir eine Knotenfärbung von G mit $\chi(G)$ Farben.
Sei V_i die Menge jener Knoten aus V die mit Farbe i gefärbt wurden, $1\leq i\leq\chi(G)$.
Sei i beliebig aus $\{1,2,\dots,\chi(G)\}$.
$\forall v\in V_i$ gilt $d(v)=k$ und alle ~~k~~ Nachbarn von v müssen in $V\setminus V_i$ liegen $\Longrightarrow$

$$|V\setminus V_i|\geq k \Rightarrow |V_i|\leq n-k \quad \forall\ i\in\{1,2,\dots,\chi(G)\}$$

$V_1, V_2,\dots,V_{\chi(G)}$ ist eine Zerlegung von V

$\Downarrow$

$$n=|V|=|V_1|+|V_2|+\dots+|V_{\chi(G)}|\leq\chi(G)\,(n-k)$$

$\Downarrow$

$$(*)\quad \chi(G)\geq\frac{n}{n-k}$$ und da $\chi(G)\in\mathbb{N}$

folgt aus (*) $\chi(G)\geq\left\lceil\frac{n}{n-k}\right\rceil$

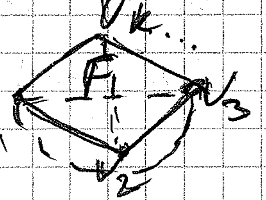
3 I $G=(V,E)$ maximal planar

II G Triangulation

III $|E(G)| = 3|V(G)| - 6$

I $\Rightarrow$ II: Ann. G keine Triang.

In einer planaren Einbettung von G $\exists$ eine Fläche die von einem Kreis der Länge ≥ 4 berandet wird. Sei dieser Kreis $v_1 v_2 v_3 \dots v_k$ mit $k \geq 4$



Falls $(v_1 v_3) \in E(G)$

Dann füge $(v_1 v_3)$ hinzu und Planarität wird nicht zerstört (siehe Bild).

Sonst wenn $(v_1 v_3) \in E(G)$ dann verläuft diese Kante außerhalb der von $v_1 v_2 \dots v_k$ berandeten Fläche F.

$(v_2 v_k) \notin E(G)$ denn sonst müsste diese Kante, die außerhalb der Fläche F verlaufen muss, die Kante $(v_1 v_2)$ überkreuzen.

Füge $(v_2 v_k)$ innerhalb F hinzu. Die Planarität wird nicht zerstört (vgl. Bild).

II $\Rightarrow$ III: G Triangulation $\Rightarrow$ G planar und zshg.

$\Downarrow$

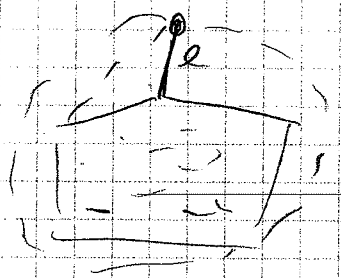
$(**)$ $2 = |V| - |E| + |F|$ (Eulersche Polyederformel)

$\sum_{f \in F} \sum_{e \in \delta(f)} 1 = 3|F|$ (da $|\delta(f)| = 3$ ~~$\forall f$~~ Fläche f da G Triangulation)

$(*)$ $\Vert$

$\sum_{e \in E} \sum_{f \in F: e \in \delta(f)} 1 = 2|E|$ weil jede Kante dem Rand von genau 2 Flächen gehört.

Wenn eine Kante e dem Rand von nur 1 Fläche gehören würde so wäre dies die äußere Fläche



⇒ Der Endpunkte dieser Kante hätte Grad 1 sonst würde die Kante e doch 2 Flächenrändern gehören.

Denn Endknoten mit Grad 1 kann mit jedem Knoten aus dem Rand der äußeren Fläche verbunden werden ohne die Planarität zu zerstören (siehe Bild) ⇒ Triangulation nicht max. planar !!!

Widerspruch weil: sei $e=(v_1 v_2) \in T$ (Triangulation)

v_1 und v_2 gehören unterschiedlichen Flächen weil sonst wären sie miteinander verbunden da alle Flächen Dreiecke. D.h. $e=(v_1 v_2)$ muss die Ränder der jeweiligen Flächen überkreuzen ⇒ $e=(v_1 v_2)$ kann nicht zur T hinzugefügt werden ohne die Planarität zu zerstören

Aus (*) $F = \frac{2|E|}{3}$

Setze in (**) ein $2 = |V| - |E| + |F| = |V| - |E| + \frac{2|E|}{3} = |V| - \frac{|E|}{3}$

$\Downarrow$

$$|E| = 3|V| - 6$$

$\underline{\underline{III \Rightarrow I}}$: Angenommen: $G=(V,E)$ planar und $|E| = 3|V|-6$

Fall A) Falls G zshgd. dann

G max planar ansonsten könnten wir eine Kante hinzufügen sodass $G' = (V, E \cup \{e'\})$ weiterhin planar wäre und $|E \cup \{e'\}| = |E|+1 \leq 3|V|-6$

Fall 3)
Falls G nicht zshg. dann seien
(V_i, E_i) $i = 1, 2, \dots k$ seine zshg. komp.
$(k > 1)$
Die sind alle planar so gilt
$|E_i| \leq 3|V_i| - 6$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} |E_i|}_{=|E|} \leq 3\sum_{i=1}^{k} |V_i| - k \cdot 6 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6 \cdot k$$

Und laut Angabe $\underbrace{3|V| - 6 = E}_{} \leq 3|V| - 6k$

$k \leq 1$!!

Widerspruch

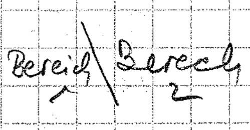
Also G muss zshg. sein.

4. Sei a_n # der Bereichen in denen die Ebene geteilt wird, wenn n paarweise nicht parallele Geraden gezeichnet werden, sodass nicht mehr als 2 davon durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

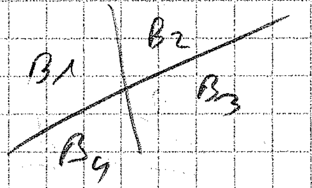
Gesucht eine Formel für a_n

$n=0 \quad a_0 = 1$

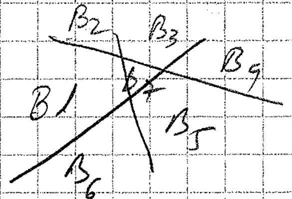
$n=1 \quad a_1 = 2$



$n=2 \quad a_2 = 4$



$n=3 \quad a_3 =$



Angenommen wir haben n Geraden wie oben beschrieben, die a_n Bereiche in der Ebene definieren.
Die (n+1).-Gerade schneidet die n vorhandenen Geraden in je einem Schnittpunkt. Es entstehen also insgesamt n Schnittpunkt in Gerade n+1 die diese Gerade in n+1 Segmenten zerteilen. Jedes Segment teilt eines des bestehenden Bereiche der Ebene entzwei.
Es entstehen also n+1 neue Bereich.
Es gilt also

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

Charakt. Polynom: $X = 1$ NS $\quad x_0 = 1 \quad \mu(x_0) = 1$

$$n+1 = p(n) \qquad Grad(p(n)) = 1$$

$$\beta = 1 \qquad \mu(\beta) = 1$$

Ansatz $a_n = A \cdot 1^n + 1^n \cdot (Bn + C) \cdot n^{\mu(\beta)} = A + Bn^2 + Cn$

$n=0 \qquad 1 = A + B\cdot 0^2 + C\cdot 0 = A$

$n=1 \qquad 2 = A + B\cdot 1^2 + C\cdot 1 \Rightarrow B + C = 1$

$n=2 \qquad 4 = A + B\cdot 2^2 + C\cdot 2 \Rightarrow 3 = 4B + 2C$

$$\left.\begin{array}{l} 2B+2C=2 \\ 4B+2C=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Aus $\begin{array}{l} B+C=1 \\ B=\frac{1}{2} \end{array}$ folgt $C=\frac{1}{2}$

$$a_n = 1 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

5) $\quad a_n = (1+n)^3 \quad n \in \mathbb{N}_0$

Gesucht: die erzeugende Funktion $a(x)$ von a_n.

$(*)\ (1+n)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Erzeugende Fkt von $n = b_n \quad n \in \mathbb{N}_0$

$\frac{1}{1-x}$ erzeugende Fkt. von $\underset{c_0}{1}, \underset{c_1}{1}, \dots \underset{c_n}{1}$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ erz. Fkt. von $\underset{c_0}{1}, \underset{c_1}{2}, \dots, \underset{c_n}{n}, \dots$

$\Longrightarrow \boxed{\frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{erz. Fkt. von } 0, 1, 2, \dots n}$

Aus Hinweis $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ erz. Fkt von $\underset{c_0}{1^2}, \underset{c_1}{2^2}, \dots, \underset{c_n}{(n+1)^2}, \dots$

$\Longrightarrow \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ erz. Fkt von $\underset{c_0}{0}, \underset{c_1}{1^2}, 2^2, \dots \underset{c_{n+1}}{(n+1)^2},$

$\Rightarrow$ erz Fkt von $0, 1^3, 2^3 \dots \underset{c_{n+1}}{(n+1)^3}$ ist $x\, a(x)$

wobei $a(x)$ erz. Fkt von $1^3, 2^3, \dots (n+1)^3, \dots$

Setze alles in $(*)$ ein.

$a(x) = x\,a(x) + 3\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$

$a(x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{3x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}\frac{(1-x)^2 + 3x(1+x) + 3x(1-x)}{(1-x)^2}$

$$Q(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1 - 2x + x^2 \quad + 3x + 3\cancel{x^2} + 3x - 3\cancel{x^2}}{(1-x)^2}$$

4

$$\boxed{Q(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(1-x)^4}}$$