(1) $(G,\circ)$ Gruppe

$H \subseteq G$ $\quad$ H endlich $\quad$ $H \neq \emptyset$

H abgeschl. unter $\circ$: $\forall a,b \in H \quad a\circ b \in H$

Z.z. $\quad H \leq G$

Lösung:

Aus der Theorie: falls $(H,\circ)$ Gruppe, dann ist $H \leq G$.

Wir zeigen • innere Verknüpfung:
$\forall a,b \in H \quad a\circ b \in H$ (laut Angabe)

• Assoz. gesetz:
$\forall (a,b,c) \in H^3 \quad a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c$
vererbt

• $\exists\, e \in H$ sodass $\quad a\circ e = e\circ a = a \quad \forall a \in H$

Sei $a \in H$ $\quad \{a^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ $\quad$ weil H abgeschl. bzgl. $\circ$

Da H endlich $\exists\, n_1 < n_2 \quad a^{n_1} = a^{n_2}$

$\Downarrow$

$$e = \underbrace{(a^{n_1})^{-1}}_{\in G} \circ a^{n_1} = a^{n_2}(a^{n_1})^{-1} = a^{n_2-n_1} \in H$$

da H abgeschl. und $n_2 - n_1 > 0$

• $\forall a \in H \quad \exists\, a^{-1} \in H$, sodass $a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a = e$

Wie oben $\forall a \in H \quad \exists\, n_1 < n_2$, sodass $a^{n_2-n_1} = e$

Falls $n_2 - n_1 = 1$ dann $a^{n_2-n_1} = a^1 = a = e$ und $a^{-1} = e \in H$

Falls $n_2 - n_1 > 1$, dann $a^{n_2-n_1} = a^{1+(n_2-n_1-1)} = a\circ a^{n_2-n_1-1} = e$

und $e = a^{n_2-n_1} = a^{n_2-n_1-1}\circ a$ $\quad$ D.h. $a^{-1} = a^{n_2-n_1-1} \in H$.

(2) $G=(V,E)$ einfacher, ungerichteter, zshg. Graph.

Blatt 1

- $\exists\, v_0 \in V$ mit $d(v_0) = 6$
- $\exists\, K_1 \subseteq V$ und $K_2 \subset V$ sodass $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ und K_1 und K_2 induzieren Kreise in G
- $|E| = 10$.

Gesucht: maximaler **Knotenanzahl** $|V|$

Lösung.

$$2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = \begin{cases} d(v_0) + \sum_{v\in K_1} d(v) + \sum_{v \in K_2} d(v) + \sum_{v\in V\setminus(K_1\cup K_2\cup\{v_0\})} d(v) & \text{falls } v_0 \notin K_1 \cup K_2 \\ \sum_{v\in K_1} d(v) + \sum_{v\in K_2} d(v) + \sum_{v \in V\setminus(K_1\cup K_2)} d(v) & \text{falls } v_0 \in K_1 \cup K_2 \end{cases} \quad (*)$$

Fall a) $v \in K_1 \cup K_2$

Ann. obdA $v_0 \in K_1$ $\quad \forall\, v \in K\setminus\{v_0\}\ \ d(v) \geq 2$ weil K_1 Kreis

Da G zshg. $\exists\, v_1 \in K_2 \ \ d(v_1) \geq 3$

und $\forall\, v \in K_2 \setminus \{v_1\}\ \ d(v) \geq 2$ weil K_2 Kreis

Weiters gilt $|K_1| \geq 3$, $|K_2| \geq 3$

$\forall\, v \in V \setminus K_1 \cup K_2$ gilt $d(v) \geq 1$ weil G zshg.

Eingesetzt in $(*)$:

$$20 = d(v_0) + \sum_{v\in K_1\setminus\{v_0\}} d(v) + d(v_1) + \sum_{v\in K_2\setminus\{v_1\}} d(v) + \sum_{v\in V\setminus(K_1\cup K_2)} d(v)$$

$$\geq 6 + 2(|K_1| - 1) + 3 + 2(|K_2| - 1) + (|V| - |K_1| - |K_2|)$$

(2)

Blatt 2

$\Downarrow$

$20 \geq 6 + 2|k_1| - 2 + 3 + 2|k_2| - 2 + |V| - |k_1| - |k_2|$

$\Downarrow$

$20 \geq 5 + |k_1| + |k_2| + |V|$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{|V|}} \leq 20 - 5 - |k_1| - |k_2| \leq 20 - 5 - 6 = \underline{\underline{9}}$

<u>Fall b</u> $\quad v \notin k_1 \cup k_2$

Da G zshg $\quad \exists\, v_1 \in k_1$ mit $d(v_1) \geq 3$

$\exists\, v_2 \in k_2$ mit $d(v_2) \geq 3$

Da k_1, k_2 Kreise gilt $\quad \forall v \in k_1 \cup k_2 \quad d(v) \geq 2$

Da G zshg. gilt $\quad d(v) \geq 1 \quad \forall\, v \in V \setminus (k_1 \cup k_2 \cup \{v_0\})$

Eingesetzt in (*)

$$20 = d(v_0) + \sum_{v \in k_1} d(v) + \sum_{v \in k_2} d(v) + \sum_{v \in V \setminus (k_1 \cup k_2 \cup \{v_0\})} d(v)$$

$$\geq 6 + 3 + 2(|k_1| - 1) + 3 + 2(|k_2| - 1) + (|V| - |k_1| - |k_2| - 1)$$

$$= 8 + |k_1| + |k_2| + |V| - 1$$

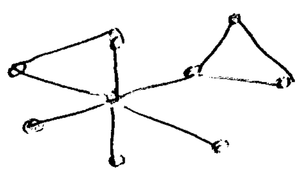
$\Downarrow$

$\underline{\underline{|V|}} \leq 20 - 7 - |k_1| - |k_2| \leq \underline{\underline{6}}$

Zusammenfassend gilt $\quad |V| \leq 9$

Wird $|V| = 9$ erreicht?

Ja



③ 12 Chemikalien $\in \{1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12\}$

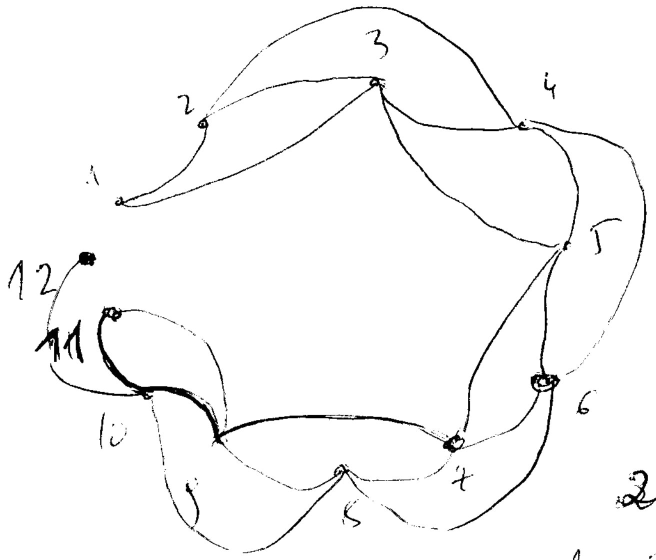
$\forall\ i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ kann i nicht im selben Raum wie $i+1$ bzw. $i+2$ gelagert werden.

Frage: Welche Mindestanzahl an Lagerräumen wird benötigt

Lösung: Sei $G = (V, E)$ mit

$V = \{1, 2, \dots, 10, 11, 12\}$ und

$E = \{(i, i+1) : 1 \le i \le 10\} \cup \{(i, i+2) : 1 \le i \le 10\}$



$G = (V, E)$ ist Planar

$\Downarrow$

färbbar mit 4 Farben aus 4-Farbensatz

$\Downarrow$

\# Lagerräume ≤ 4

2 kann sie nicht sein weil Dreiecke $\{i, i+1, i+2\}$ vorhanden.

D.h. \# Lagerräume 3 oder 4.

Mit 3 geht es sich aus.

Blau: $\{1, 4, 7, 10\}$

Rot: $\{2, 5, 8, 11\}$

Gelb: $\{3, 6, 9, 12\}$

④ $n \in \mathbb{N}$

Blatt 1

b_n = # der Folgen (a_i) $1 \le i \le n$ (Länge n also)

mit • $a_i \in \{0,1,3\}$ $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$

• $a_i + a_{i+1} \le 3$ $\forall i \in \{1,2,\dots,n-1\}$.

Frage: $b_n = ?$ Asymptotisches Verhalten von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Lösung

Sei $(a_1 a_2 \dots a_n)$ eine Folge der Länge n.

Es können 3 Fälle auftreten:

a) $a_n = 3$ b) $a_n = 0$ c) $a_n = 1$

a) $a_n = 3 \Rightarrow a_{n-1} = 0$

D.h. $(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_{n-2}, 0, 3)$

Die Anzahl der Folgen mit Länge n die mit 0,3 enden ist = # Folgen der Länge n-2

also b_{n-2}

b) $a_n = 0$ a_{n-1} beliebig (aus $\{0,1,3\}$)

$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_{n-1}, 0)$

Folgen der Länge n die mit 0 enden =

Folgen der Länge n-1 also b_{n-1}

c) $a_n = 1 \Rightarrow a_{n-1} \in \{0,1\}$

c1) $a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-2}$ beliebig ($\in \{0,1,3\}$)

$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_{n-2}, 0, 1) \Rightarrow$ # Folgen der Länge n

die mit 0,1 enden = # Folgen der Länge n-2

also b_{n-2}

④ Blatt 2

(2) $a_{n-1} = 1 \Rightarrow a_{n-2} \in \{0,1\}$

(2,1) $a_{n-2} = 0$

$(a_1\ a_2\ \dots\ a_n) = (a_1\ \dots\ a_{n-2}\ 0,1,1)$

$\Rightarrow$ # Folgen der Länge n die mit 011 enden

= # Folgen der Länge $n-3$ also b_{n-3}

(2,2) $a_{n-2} = 1 \Rightarrow a_{n-3} \in \{0,1\}$

u.s.w.

Zusammenfassend gilt:

$$b_n = b_{n-2} + b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} + \dots b_1 + 1$$

$\forall\ n \geq 2$

(Der letzte Summand die 1, entspricht der Folge bestehend aus Einsen (1en))

$$b_{n+1} = b_{n-1} + b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots b_1 + 1$$

$$b_{n+1} - b_n = b_n + b_{n-1} - b_{n-2} \Rightarrow b_{n+1} = 2b_n + b_{n-1} - b_{n-2}$$

$\forall\ n \geq 3$

$b_1 = 3$ $(\{0\}, \{1\}, \{3\})$

$b_2 = 6$ $(\{0,0\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{1,1\}, \{1,0\}, \{3,0\})$

$b_3 = 14$ $\{\{0,0,1\}, \{0,0,0\}, \{0,0,3\}, \{0,1,1\}, \{0,1,0\}, \{0,3,0\}, \{1,0,0\}, \{1,0,1\}, \{1,0,3\}, \{1,1,0\}, \{1,1,1\}, \{3,0,0\}, \{3,0,1\}, \{3,0,3\}\}$

charakt. Polynom $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$

NS: $\lambda_1 \approx 2.247$ $\lambda_2 \approx -0.802$ $\lambda_3 \approx 0.555$

④ Blatt 3

$$b_n = q_1 (\lambda_1)^n + q_2 (\lambda_2)^n + q_3 (\lambda_3)^n$$

$$\begin{cases} b_1 = 3 = q_1 + q_2 + q_3 \\ b_2 = 6 = q_1 \lambda_1^2 + q_2 \lambda_2^2 + q_3 \lambda_3^2 = 5.049\, q_1 + 0.6432\, q_2 + 0.308\, q_3 \\ b_3 = 14 = q_1 \lambda_1^3 + q_2 \lambda_2^3 + q_3 \lambda_3^3 = 11.3457\, q_1 + 0.5158\, q_2 + 0.171\, q_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$q_1 = 1.2905 \qquad q_2 = -2.7054 \qquad q_3 = 4.4149$$

$$b_n = 1.2905\,(2.247)^n - 2.7054\,(-0.802)^n + 4.4149\,(0.555)^n$$

$$\forall\, n \geq 1$$

$$|\lambda_1| = \max \{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| \}$$

$$b_n \in \mathcal{O}(|\lambda_1|^n) = \mathcal{O}((2.247)^n)$$

⑤ **Blatt 1**

a_n sei # $(i,j,k) \in \mathbb{N}_0^3$, sodass $i \ge 1$, $j \ge 2$, $k \ge 0$ und $2i + j + 2k = n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Frage: Erzeugende Fkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine Formel für a_n.

Lösung

Polynomen-Ansatz

Polynom für i: $x^2 + x^4 + \dots x^{2i} + \dots = \frac{x^2}{1-x^2}$

Polynom für j: $x^2 + x^3 + \dots x^j + \dots = \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{x^2}{1-x}$

Polynom für k: $1 + x^2 + x^4 + \dots x^{2k} + \dots = \frac{1}{1-x^2}$

a_n ist der Koeff neben x^n in $\frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = A(x)$

wobei $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Also $\boxed{A(x) = \frac{x^4}{(1-x^2)^2(1-x)}}$ ist die erzeugende Fkt. von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$A(x) = x^4 (1-x^2)^{-2} (1-x)^{-1} = x^4 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x^2)^k$$

↳ verallg. Binomialsatz

Da $\binom{-2}{k} = \frac{(-2)(-2-1)\dots(-2-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(k+1)!}{k!} = (-1)^k (k+1)$

gilt $A(x) = x^4 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(-1)^k x^{2k} = x^4 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^{2k}$ (*)

(5) Blatt 2

Aus (*) folgt dass $a_0 = 0 = a_1 = a_2 = a_3$

und $a_n = \left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^{2k} \right] (x^{n-4}) \quad \forall \ n \geq 4$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (l+1) \right) x^k \right] (x^{n-4}) \quad \forall \ n \geq 4$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor} (l+1) = \frac{\left(1 + \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor + 1\right) \left(\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor + 1 \right)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \frac{\left(\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor + 2 \right) \left(\frac{n-4}{2} + 1 \right)}{2}$$

oder im eleganterer Ausdruck

$$a_n = \frac{\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \right) \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \quad \forall \ n \geq 4$$