(1)

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f_3(x) = 1 - x$

$f_4(x) = \frac{x}{x-1}$

$f_5(x) = \frac{x-1}{x}$

$f_6(x) = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow$) Abgeschl.

$f_1 \circ f_i = f_i \qquad \forall\ i = 1, 2, \dots, 5$ weil f_1 ident. Abbild.

$f_2 \circ f_2(x) = 1/(1/x) = x = f_1(x)$

$f_2 \circ f_3(x) = \frac{1}{1-x} = f_6(x)$

$f_3 \circ f_2(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = f_5(x)$

$f_2 \circ f_4(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x} = f_5(x)$

$f_4 \circ f_2(x) = \frac{1/x}{1/x - 1} = \frac{1/x}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{1-x} = f_6(x)$

$f_2 \circ f_5(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} = f_4(x)$

$f_5 \circ f_2(x) = \frac{1/x - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1-x}{1} = 1 - x = f_3(x)$

$f_2 \circ f_6(x) = \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - x = f_3(x)$

$f_6 \circ f_2(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} = f_4(x)$

$$f_3 \circ f_3(x) = 1-(1-x) = x = f_1(x)$$

$$f_3 \circ f_4(x) = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f.$$

$$f_4 \circ f_3(x) = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} = f_5(x)$$

$$f_3 \circ f_5(x) = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{x-x+1}{x} = \frac{1}{x} = f_2(x)$$

$$f_5 \circ f_3(x) = \frac{\cancel{1}-x-\cancel{1}}{1-x} = \frac{x}{x-1} = f_4(x)$$

$$f_3 \circ f_6(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{\cancel{1}-x-\cancel{1}}{1-x} = \frac{x}{x-1} = f_4(x)$$

$$f_6 \circ f_3(x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} = f_2(x)$$

$$f_4 \circ f_4(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x = f_1(x)$$

$$f_4 \circ f_5(x) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1} = \frac{\frac{x-1}{\cancel{x}}}{\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{\cancel{x}}} = 1-x = f_3(x)$$

$$f_5 \circ f_4(x) = \frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{\cancel{x-1}}}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x-1}}} = \frac{1}{x} = f_2(x)$$

$$f_4 \circ f_6(x) = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1} = \frac{\frac{1}{\cancel{1-x}}}{\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x}{\cancel{1-x}}} = \frac{1}{x} = f_2(x)$$

$$f_6 \circ f_4(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} = 1-x = f_3(x)$$

$$f_5 \circ f_6(x) = \frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x}{\cancel{1-x}}}{\frac{1}{\cancel{1-x}}} = x = f_1(x)$$

$$f_6 \circ f_5(x) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x = f_1(x)$$

$$f_5 \circ f_5(x) = \frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{x-1}{\cancel{x}}} = \frac{1}{1-x} = f_6(x) \Big\} \quad f_6 \circ f_6(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = f_5(x)$$

Zusammenfassung in der Verknüpfungstafel

$f \circ g$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

$\Rightarrow$ f_1 ist das neutrale Element (ersichtlich aus 1. Zeile bzw. 1. Spalte der Verknüpf.tafel)

$\Rightarrow$ $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$, $f_4^{-1} = f_4$, $f_5^{-1} = f_6$, $f_6^{-1} = f_5$ (ersichtlich aus der Verknüpf.tafel)

$\Rightarrow$ Assoziativität aus der Assoz. der Verknüpfung von Abbildung.

Also Gruppe.

$\Rightarrow$ Isomorphie zu S_3

$S_3 = (\{ id, (12), (23), (13), (123), (132) \}, \circ)$

	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
id	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	id	(132)	(123)	(13)	(23)
(13)	(13)	(123)	id	(123)	(23)	(12)
(23)	(23)	(132)	(132)	id	(12)	(13)
(123)	(123)	(23)	(12)	(13)	(132)	id
(132)	(132)	(13)	(23)	(12)	id	(123)

Sei $h: S_3 \to \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

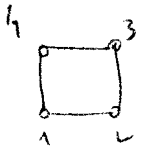
$id \mapsto f_1$
$(12) \mapsto f_2$
$(13) \mapsto f_3$
$(23) \mapsto f_4$
$(123) \mapsto f_5$
$(132) \mapsto f_6$

h ist ein Isomorphismus weil Bijektion und aus dem Vergleich der Verknüpfungstafel erkennbar, dass

$$f(\pi_i \circ \pi_j) = f(\pi_i) \circ f(\pi_j)$$

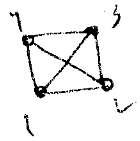
wobei $\pi_i, \pi_j \in S_3$.

(2)

a) 

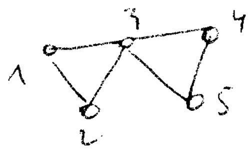
Eulersch weil jeder Knoten einen geraden Grad besitzt

Hamilt. weil ein Hamilt. Kreis 1,4,3,2,1 vorhanden

b) 

nicht Eulersch weil mindestens 1 Knoten (eigentlich alle) einen ungeraden Grad (3) besitzt.

Hamilt. weil Hamilt. Kreis 1,2,3,4,1 vorhanden

c) 

Eulersch weil jeder Knoten einen geraden Grad besitzt

Nicht Hamilt.: wenn Hamilt. Kreis vorhanden, so würde der Graph nach Entfernung eines Knoten (inkl. der mit diesem Knoten inzidierenden Kanten) nicht in ≥2 Zshgkomponenten zerfallen. Hier ist dies aber der Fall $G \setminus \{3\}$ ist nicht zshg.

d) 

nicht Eulersch. weil nicht zshg.

nicht Hamilt weil nicht zshg.

(3) $G = (V, E)$ planar

$$|V| = 9$$

$$d(v) = k \quad \forall v \in V$$

$$|F(G)| = |F| = 11.$$

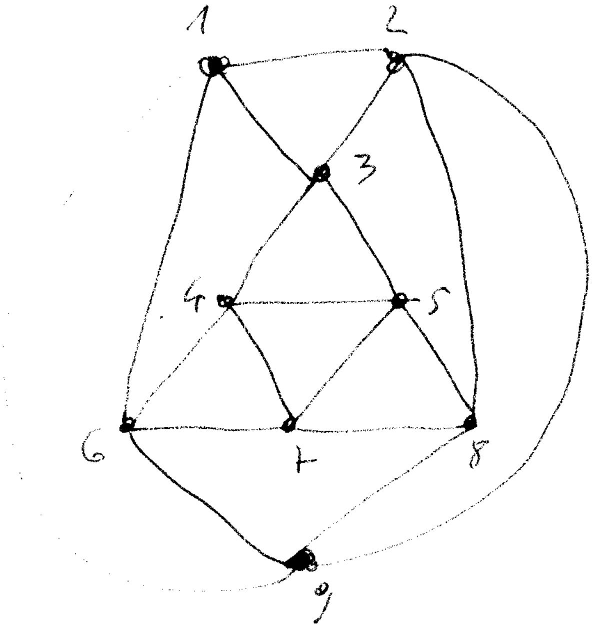
$$k = ?$$

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$$ (Eulersche Polyeder Formel)

$$\overset{\shortparallel}{9} - |E(G)| + 11 = 2 \Rightarrow |E(G)| = 18$$

$$9k = |V| \cdot k = \sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)| = 36$$

$$\boxed{k = 4}$$



(4)

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n \qquad n \geq 0$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 3$$

---

charakt. Gleichung: $\quad x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

Ansatz:

$$a_n = (A \cdot n + B) \cdot 1^n + C \cdot 2^n \qquad n \geq 0$$

$n = 0 \qquad a_0 = 1 = B + C$

$n = 1 \qquad a_1 = 3 = A + B + 2C$

$n = 2 \qquad a_2 = 2^0 + 2a_1 - a_0 = 1 + 6 - 1 = 6 = (2A + B) + 4C$

$$\left\{ \begin{array}{l} B + C = 1 \\ A + B + 2C = 3 \\ 2A + B + 4C = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -B = 0 \\ B + C = 1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = 3 - B - 2C = 3 - 2 = 1$$

$$\boxed{a_n = n + 2^n} \qquad n \geq 0$$

(5) a)

$$k_1 + k_2 + k_3 = n \qquad (*)$$

Zu bestimmen # Lösungen (k_1, k_2, k_3) der obigen Gleichung (*) mit $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

Sei $p(x) = x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - x^0 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$

$$q(x) = \quad \dots \quad = \frac{x}{1-x}$$

$$r(x) = \quad \dots \quad = \frac{x}{1-x}$$

Gemeinte # Lösungen = koeff. neben x^n in $p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$

$$p(x) \cdot q(x) \cdot r(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = x^3 (1-x)^{-3} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-x)^k$$

$$\binom{-3}{k} = \frac{-3(-3-1) \dots (-3-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{3 \cdot 4 \dots (k+1)(k+2)}{k!}$$

$$\binom{-3}{k} = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$p(x) \cdot p(x) \cdot r(x) = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2} (-1)^k x^k =$$

$$= x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k = \sum_{k=3}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = \frac{(n-3+1)(n-3+2)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \quad \Big| \quad n \geq 3$$

Für $n \leq 2$ hat die Gleichung (*) keine Lösung und es gibt somit keine mögliche Zusammensetzungen des Teams.

⑤ b)

Gesucht ist # Lösungen $(k_1 k_2 k_3)$ der Gleichung

$$k_1 + k_2 + k_3 = n \qquad (*)$$

wobei $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ $k_1 + k_2 = k_3$ und

$n \in \mathbb{N}$, gerade.

Sei $n = 2m$ wobei $m = \frac{n}{2}$

$(*)$ lässt sich als $k_1 + k_2 + k_1 + k_2 = 2m \Rightarrow k_1 + k_2 = m$ $(**)$

schreiben

Gesucht ist also # Lösungen von $(**)$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

Analog wie im Punkt a) ist dies der Koeff neben

x^m in $\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = x^2 (1-x)^{-2} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x)^k$

$$\binom{-2}{k} = \frac{-2\,(-2-1)\cdots(-2-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{2 \cdot 3 \cdots (k+1)}{k!} = (-1)^k (k+1)$$

Es gilt also $\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \cdot (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^{k+2}$

Koeff neben x^m ist $m-2+1 = m-1 = \frac{n}{2} - 1$ für $m = \frac{n}{2} \geq 2$

der möglichen Zusammensetzungen des Teams ist

$\frac{n}{2} - 1$ für $n \geq 4$

und $\emptyset$ für $n \leq 3$, n gerade, $n \in \mathbb{N}$.