

Analysis 1, WS 2009/2010, 9. Übungsblatt

66. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(I) \subseteq J$. Zeigen Sie:
- Sind f und g beide streng monoton wachsend oder beide streng monoton fallend, so ist $f \circ g$ streng monoton wachsend.
 - Ist eine der beiden Funktionen streng monoton wachsend und die andere streng monoton fallend, so ist $f \circ g$ streng monoton fallend.
67. Sei $h: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ (das ist die Menge der positiven reellen Zahlen) eine streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) Funktion. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{h}$ streng monoton fällt (bzw. wächst).
68. Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Die Funktionen $\phi := \max\{f, g\}$ und $\psi := \min\{f, g\}$ seien definiert durch:

$$\phi(x) := \max\{f(x), g(x)\} \text{ und } \psi(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

für alle $x \in D$. Zeigen Sie: sind f und g stetig auf D , so sind auch ϕ und ψ stetig auf D .

69. Sei M eine Teilmenge von \mathbb{R} . Die Funktion $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$d(x) := \inf\{|x - y| : y \in M\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass d stetig ist.

70. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass die untenstehende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x.$$

71. Die Funktionen Cosinus und Sinus werden im Komplexen wie folgt definiert:

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ und } \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Beweisen Sie folgende Gleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$:

- $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
- $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
- $\cosh(iz) = \cos z$
- $\sinh(iz) = i \sin z$

72. Für eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ seien die Funktionen $f_+, f_-: D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$,
- f ist genau dann stetig, wenn f_+ und f_- stetig sind.

73. Berechnen Sie ohne Benutzung der Differentiationsregeln direkt aus der Definition für

- $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ die Ableitung $f'(2)$;
- $f(x) = \sqrt{(3x-1)}$ die Ableitung $f'(4)$.