Analysis 1, WS 2009/2010, 9. Übungsblatt

66. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g\colon I \to \mathbb{R}$, $f\colon J \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(I) \subseteq J$. Zeigen Sie:
    (a) Sind f und g beide streng monoton wachsend oder beide streng monoton fallend, so ist $f \circ g$ streng monoton wachsend.
    (b) Ist eine der beiden Funktionen streng monoton wachsend und die andere streng monoton fallend, so ist $f \circ g$ streng monoton fallend.

67. Sei $h\colon I \to \mathbb{R}_+^*$ (das ist die Menge der positiven reellen Zahlen) eine streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) Funktion. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{h}$ streng monoton fällt (bzw. wächst).

68. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ auf eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Die Funktionen $\phi := \max\{f, g\}$ und $\psi := \min\{f, g\}$ seien definiert durch:
$$\phi(x) := \max\{f(x), g(x)\} \text{ und } \psi(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$
für alle $x \in D$. Zeigen Sie: sind f und g stetig auf D, so sind auch ϕ und ψ stetig auf D.

69. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Funktion $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch
$$d(x) := \inf\{|x - y| \colon y \in M\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass d stetig ist.

70. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass die untenstehende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x\,.$$

71. Die Funktionen Cosinus und Sinus werden im Komplexen wie folgt definiert:
$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ und } \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\,, \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$
Beweisen Sie folgende Gleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$:
    (a) $\cos(x + iy) = \cos x cosh y - i \sin x sinh y$
    (b) $\sin(x + iy) = \sin x cosh y + i \cos x sinh y$
    (c) $cosh(iz) = \cos z$
    (d) $sinh(iz) = i \sin z$

72. Für eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ seien die Funktionen $f_+, f_-\colon D \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0, \end{cases}$$
$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) > 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie:
    (a) $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$,
    (b) f ist genau dann stetig, wenn f_+ und f_- stetig sind.

73. Berechnen Sie ohne Benutzung der Differentiationsregeln direkt aus der Definition für
    (a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ die Ableitung $f'(2)$;
    (b) $f(x) = \sqrt{(3x - 1)}$ die Ableitung $f'(4)$.