Analysis 1, WS 2009/2010, 8. Übungsblatt

58. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 10x}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

59. Bestimmen Sie die Ansätze (Die Koeffizienten im Zähler müssen nicht bestimmt werden!) für die Partialbruchzerlegung von

    (a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x-2)(x+4)(x^2 - 3x + 2)}$

    (b) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x^2 + 2x + 2)^2 (x^2 + 2x + 1)^2}$

60. Betrachten Sie die Funktionen $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sqrt{x}$ und $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$. Zeigen Sie: g ist gleichmäßig stetig und f ist nicht gleichmäßig stetig.

61. Sei $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, falls $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existiert.

62. Sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F([a,b]) \subseteq [a,b]$. Zeigen Sie, dass F mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $F(x_0) = x_0$.

63. (a) Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = g(x_0)$ gibt.

    (b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

    $$\frac{1}{1 + x^2} = \sqrt{x}$$

    eine Lösung in $\mathbb{R}_+$ besitzt.

64. Für $x > 1$ seien $f_0(x)$ bis $f_9(x)$ auf $\mathbb{R}$ der Reihe nach definiert als

$$1, \ln(\ln x), \ln x, x^a, x^b, e^x, x^x, (x^x)^x, e^{e^x}, x^{x^x}.$$

Dabei seien a, b reelle Zahlen mit $0 < a < b$. Man beweise: Für $i, k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ mit $i < k$ gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_i(x)}{f_k(x)} = 0.$$

65. Auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) := tanh \frac{1}{x}.$$

.

    (a) Zeigen Sie, dass f auf jedem der Intervalle $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend ist.

    (b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ und $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

    (c) Beweisen Sie, dass die wie folgt definierte funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

    $$g(x) := \begin{cases} x\, tanh \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

    stetig ist.