Analysis 1, WS 2009/2010, 7. Übungsblatt

51. Für die nachstehenden Funktionen ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| \leq \delta_\epsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ folgt. Der Definitionsbereich der Funktion f wird hier mit $D(f)$ bezeichnet.

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad D(f) = (0, \infty)$ $\quad$ (b) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ $\quad D(f) = \mathbb{R}$

52. Man gebe, falls möglich, stetige Ergänzungen der folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Punkten ξ an:

    (a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$, $\quad \xi = \pm 2$ $\quad$ (b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$, $\quad \xi = 1$

53. Man untersuche, ob die folgenden Grenzwerte von Funktionen existieren und bestimme sie im Fall der Existenz:

    (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$, $\quad$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$

54. Führen Sie für die angegebenen Funktionen folgende Untersuchungen durch:

    - Wir groß ist der maximale Definitionsbereich $D(f)$?
    - Wo ist f unstetig, rechts-unstetig, links-unstetig? Bestimmen Sie den Stetigkeitsbereich $S(f)$.
    - Bestimmen Sie die Häufungspunkte von $S(f)$ (inkl. uneigentliche Häufungspunkte). Besitzt f an den Häufungspunkten Grenzwerte, eventuell auch einseitige?
    - Lässt sich f irgendwo stetig ergänzen?

    (a) $f(x) = \dfrac{3|x^2 - 4|}{3(x - 2)}$, $\quad$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{falls } x > 2 \\ x^2 - \frac{7}{2} & \text{falls } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5}{2x} & x < -1 \end{cases}$

55. Für $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ und $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Weiters sei f in $x = 0$ stetig. Zeigen Sie, dass f in ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

56. Gegeben sei die Funkion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0; \\ \frac{1}{k+1} & \text{falls } \frac{1}{k+1} < |x| \leq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

    Man zeige:

    (a) f ist stetig im Punkt 0.

    (b) In jeder Umgebung des Nullpunktes gibt es unendlich viele Unstetigkeitsstellen.

57. Bestimmen Sie für folgende Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D(f)$, und berechnen Sie die Grenzwerte an den Rändern von $D(f)$ (auch $\pm\infty$); dabei ist $f(x) =$
    a) $\dfrac{|x^2 - 9|}{x + 3}$; $\quad$ b) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.