Analysis 1, WS 2009/2010, 5. Übungsblatt

35. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \ln n}$$

konvergiert

36. Für welche a konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k-1}}$$

und wie groß ist die jeweilige Summe?

37. Untersuchen Sie die folgenden Reihen nach Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

38. Für welche $k \in \{0, 1, 2\}$ konvergiert die Reihe

$$S_k := \sum_{n=k+2}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{k+2}} \ ?$$

Für welche $k \in \{0, 1, 2\}$ konvergiert die Reihe sogar absolut?

39. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{(n-1)}}{(-n)^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{\pi + (-1)^n}{n}$

40. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ihre Summe:

(a) $a_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{3^n}$,

(b) $a_n = \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$.

41. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Man zeige: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n a_n)$ konvergiert absolut! Gilt die Aussage auch für konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

42. Es sei $h_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Man beweise, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n}$ konvergiert, und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n}.$$