Analysis 1, WS 2009/2010, 4. Übungsblatt

26. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

    (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{n^4+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!3^n}$

27. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}4^n}$$

    konvergiert.

28. Unntersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

    (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{4k}{3k}}$ (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^s}$, $s \in \mathbb{R}$

29. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ihre Summe:

    (a) $a_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

    (b) $a_n = \dfrac{n-1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

30. Ordnen Sie die alternierende harmonische Reihe zu einer divergenten Reihe um.

31. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

    alternierend ist. Ist sie auch konvergent?

32. Untersuchen Sie ob die untenstehende Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe konvergiert:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - - + + \dots$$

33. Zeigen Sie: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq -1, \forall n \in \mathbb{N}$, absolut konvergiert, dann gilt dies auch für die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$$

34. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}?$$