Analysis 1, WS 2009/2010, 3. Übungsblatt

17. Untersuchen Sie die folgende Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:
$$a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n} \qquad \text{wobei} \quad a_1 = 0.$$

18. Für welche Anfangswerte x_0 konvergiert die Folge $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

19. Bestimmen Sie soweit möglich den Grenzwert der folgendermaßen gegebenen Folgen (a_n), $n \in \mathbb{N}$:
(a) $\frac{n}{3^n}$ (b) $\frac{n^2}{4^n}$ (c) $\cos(n\pi)$ (d) $(-i)^n$ (e) $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}$

20. Zeigen Sie:
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+1} = 1$
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3(3^n+5)} = 3$

21. (a) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
(b) Zeigen Sie: Aus $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
(c) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ und bestimmen sie ggf. ihren Grenzwert.

22. Man berechne die Grenzwerte der Folgen (x_n), $n \in \mathbb{N}$, soweit diese existieren:
(a) $x_n = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$
(b) $x_n = \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+5}$
(c) $x_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

23. Ist die Folge $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent?

24. Man untersuche ob die Folge (a_n) mit $a_0 = a$ und $a_1 = b$, $a_n = \frac{(a_{n-1}+a_{n-2})}{2}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, konvergiert und bestimme ggf. den Grenzwert.

25. Zeigen Sie:
(a) Es sei $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a;$$
(b) Es sei $a_n > 0$ $n \in \mathbb{N}$ und $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n};$$
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$