Analysis 1, WS 2009/2010, 2. Übungsblatt

10. Eine Metrik $d\colon S \times S \to R$ auf einer Menge S heißt Ultrametrik dann und nur dann, wenn d außer den Metrik-Axiomen auch die sogenannte verschärfte Dreiecksungleichung erfüllt:

$$\forall a, b, c \in S\,,\ d(a,b) \le \max\{d(a,c), d(c,b)\}.$$

Einen metrischen Raum mit einer Ultrametrik bezeichnet man als ultrametrischen Raum.

Betrachten Sie die Menge $\mathcal{S}$ der Folgen (x_n) aus S, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in S$. Sei $n_{x,y} \in \mathbb{N}$ als der kleinste Index definiert, sodass $x_{n_{x,y}} \neq y_{n_{x,y}}$ gilt, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n < n_{x,y}$ gilt $x_n = y_n$. Weiter sei $d\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:

$$d\Big((x_n),(y_n)\Big) = \begin{cases} \frac{1}{n_{xy}} & \text{falls } (x_n) \neq (y_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ziegen Sie, dass d eine Ultrametrik in S ist.

11. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenfalls ihren Grenzwert an:

    (a) $a_n = \frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)}$
    (b) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$
    (c) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+28n^3+1} - \sqrt{n^4+1}}$
    (d) $a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
    (e) $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}$
    (f) $a_n = \frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}$

12. Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und geben Sie ein $N \in \mathbb{N}$ an, sodass $|a_n - a| < 10^{-3}$ für $n > N$ gilt. Dabei ist $a_n =$

    (a) $\frac{6n-2}{3n+7}$,
    (b) $\frac{1}{4^n}$.

13. Die Folge a_n sei rekursiv durch $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + a_n^2}$ gegeben. Man zeige, dass diese Folge einen Grenzwert hat und bestimme seinen Wert!

14. Für welche Anfangswerte x_0 konvergiert die Folge $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an!

15. Sei $b_0 > a_0 > 0$ und folgende Folgen gegeben: $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ und $b_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2}$. Zeigen Sie, dass die Folge a_n monoton wächst, die Folge b_n monoton fällt, $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und dass die Grenzwerte der beiden Folgen übereinstimmen.

16. Berechnen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen:

    (a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{n+(-1)^n n}}$
    (b) $a_n = \frac{1}{3^{n/2}} \cos n\pi + i \cdot (-1)^n \frac{n+2}{n-3}$