Analysis 1, WS 2009/2010, 13. Übungsblatt

103. Man bestimme das n-te Taylorpolynom $T_n(x, x_0; f)$ und das n-te Lagrangesche Restglied für die folgenden Funktionen um die angegebenen Entwicklungspunkte x_0:

   (a) $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = 1$ wobei $a > 0$,

   (b) $f(x) = \sin^2(x)$, $x_0 = 0$.

104. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome $T_n(x, x_0; f)$ wobei n der angegebene Grad des Polynoms ist und x_0 jener Punkt um den $f(x)$ approximiert wird. Schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab.

   (a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ durch $T_2(x, 0; f)$ in $|x| \leq 1/10$,

   (b) $f(x) = \exp(\sin^2 x)$ durch $T_2(x, \pi/4; f)$ in $|x - \pi/4| \leq 1/10$.

105. Für kleinere Beträge von x benutzt der Ingenieur oft die Näherung:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

   Schätzen Sie für folgende α den Fehler im Bereich $|x| \leq 10^{-2}$ ab: (a) $|\alpha| < 1$, (b) $\alpha = \frac{1}{2}$ und (c) $\alpha = -\frac{1}{2}$.

106. Zeigen Sie, dass der Fehler der Approximation von e^x durch die Formel

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \text{ für } x \in (0, 1)$$

   kleiner als 0.01 ist. Verwenden Sie dieses Ergebnis um die zwei ersten Dezimalstellen von $\sqrt{e}$ korrekt zu berrechnen.

107. Betrachten Sie den Restglied der Taylor Formel erster Ordnung für eine Funktion f:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta_h h) \text{ mit } \theta_h \in [0, 1]\,.$$

   Ziegen Sie, dass $\lim_{h \to 0} \theta_h = \frac{1}{3}$, falls f''' stetig in $x = a$ mit $f'''(a) \neq 0$ ist. Wie lässt sich dieses Ergebnis für die Taylor Formel eines beliebigen Grades n verallgemeinern?