Analysis 1, WS 2009/2010, 12. Übungsblatt

96. Sei f konvex auf $[a, b]$. Man zeige, dass für alle $u, x, v \in [a, b]$ mit $u \leq x \leq v$ gilt
$$f(x) \leq \max\{f(u), f(v)\}.$$

97. Man bestimme alle lokalen und globalen Extrema von $f(x) = \frac{x}{2^x}$ auf $[0, 10]$.

98. Für ein drehzylindrisches Gefäß bestimme man die Abmessungen so, dass das Volumen V bei vorgegebener Oberfläche S maximal, bzw. die Oberfläche S bei vorgegebenem Volumen V minimal wird.

99. Für welchen Punkt (a, b) im 1. Quadranten auf der Parabel $y = 4 - x^2$ besitzt das Dreieck, das von der Tangente in (a, b) an die Parabel und den Koordinatenachsen begrenzt wird, minimalen Flächeninhalt?

100. Man diskutiere die folgenden Funktionen
    (a) $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$,
    (b) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-|x|}$,
    (c) $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.

101. Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (x^2 - 1)e^{-|x|}$ definiert. Bestimmen Sie die maximalen Konvexität- bzw. Konkavitätsintervalle dieser Funktion.

102. Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \operatorname{arccot}(x + \frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$
Bestimmen Sie für diese Funktion den maximalen Definitionsbereich, den Stetigkeitsbereich, das Monotonierverhalten, alle lokalen und globalen Extrema und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion am Rande des Definitionsbereiches.