Analysis 1, WS 2009/2010, 11. Übungsblatt

88. Man zeige die folgenden Ungleichungen:

    (a) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, wenn $x > 0$

    (b) $1 + x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$, für $x < 1$

    (c) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, für $x > 0$,

    (d) $\ln \ln x < \frac{x}{e} - 1$, für $1 < x < e$,

    (e) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \ln(x + \sqrt{1+x^2}) < x$, für $x > 0$.

89. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos(3x) - 2\cos(2x) + \cos x}$,

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \sinh^2(x))^{\frac{2}{x^2}}$,

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$,

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$,

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{(x)}}$.

90. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^x + \frac{x}{1+x^2}$ im Intervall $[-1, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt!

91. Man bestimme die Umkehrfunktion zu

    $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & \text{falls } x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

    und begründe seine Existenz.

92. Es sei f in $[a, b]$ differenzierbar und es gelte: $f(a) = 0$, $f(b) > 0$, $f'(b) < 0$. Man zeige, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt mit $f'(c) = 0$.

93. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}e^{\frac{1}{x}}$ den Definitionsbereich, bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion differenzierbar ist und geben Sie gegebenfalls die erste Ableitung an! Untersuchen Sie weiters das Monotonierverhalten und bestimmen Sie die maximalen Konvexitäts- bzw. Konkavitätsintervalle.

94. Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung:

    (a) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ $(x > 0)$

    (b) $2\arctan x = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$

    (c) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $(x \in \mathbb{R})$

    (d) $2\,\mathrm{arccot} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \pi - x$ $(0 \leq x < \pi)$

95. Zeigen Sie: Wenn f (streng) konvex und g konvex und (streng) monoton wachsend ist, dass ist $g \circ f$ (streng) konvex.