Analysis 1, WS 2009/2010, 10. Übungsblatt

74. Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen im gesamten Definitionsbereich:

    (a) $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad 0 < x < 1,$

    (b) $f(x) = x^{\frac{7}{9}}\left(x^3 + \frac{x-1}{x+1}\right), \quad x > 0,$

    (c) $f(x) = \sqrt{\frac{7x+3}{4x+2}}, \quad x \neq -\frac{1}{2},$

    (d) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}, \quad x > 0.$

75. Die Funktionen $f_1, \dots f_n$ seien auf dem Intervall $I = (a,b)$ differenzierbar, und es gelte $f_i(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$, $i = 1, \dots, n$. Man beweise

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)'}{\prod_{i=1}^{n} f_i(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(x)}{f_i(x)}.$$

76. Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall $I = (-a, a)$ mit $a > 0$ differenzierbar, es sei $f(x)g(x) = x$ auf I und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $g(0) \neq 0$ gelten muss.

77. Man bestimme die rechts- und linksseitigen Ableitungen von $f(x) = x\,|x| + 1$ in $x = 0$.

78. Prüfen Sie, ob $f(x) = x^2|x|$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ differenzierbar ist.

79. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

    Man zeige, dass g in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung. Ist die Funktion $g'(x)$ stetig?

80. Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei auf dem Intervall (a,b) n-mal differenzierbare Funktionen. Man beweise mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(x)g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(f^{(k)}(x)g(x)\right)^{(n-k)}.$$

    Hinweis: Die höheren Ableitungen einer Funktion werden rekursiv definiert: $f^{(2)} = f'' = (f')', \dots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

81. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heit gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und ungerade, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Man zeige: Die Ableitung einer gerade (bzw. ungeraden) differenzierbaren Funktion ist ungerade (bzw. gerade).

82. Man berechne die Ableitungen der folgenden Ausdrucke

    (a) $x^{(x^x)}$ (b) $(x^x)^x$ (c) $arcosh\sqrt{x}$ (d) $\dfrac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1}$

83. Differenzieren Sie folgende Funktion $f(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von f und f' an:

    (a) $f(x) = \sqrt[5]{(5x-2)^4}$ (b) $f(x) = (x-1)|x-1|$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2|x+1|}{|x-2|}$

84. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen differenzierbar:

(a) $f(x) = |1 - e^x|$ (b) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$
(c) $f(x) = 2 + |cosh\, x - 2|$ (d) $f(x) = |x+1|\sqrt[4]{|x-1|}$

85. Beweisen Sie, dass

(a) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(c) $tanh' x = \dfrac{1}{cosh^2 x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) $artanh' x = \dfrac{1}{1-x^2}$ für $x \in (-1, 1)$.
Hinweis: Nutzen Sie die Identität $artanh\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ für $x \in (-1, 1)$.

86. Man beweise, dass $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ für $x \in (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist.

87. Man untersuche die folgende Funktion auf Monotonie:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x}, \ 0 < a < b.$$