Analysis 1, WS 2009/2010, 1. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Gleichungen über $\mathbb{R}$:

   (a) $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$

   (b) $\sqrt{9x^4} + 12x + 9 = 0$

   (c) $\sqrt{x^4} = 2|x| - 1$

2. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen:

   (a) $3 - x^2 + 2x > 0$

   (b) $x + 3 > \dfrac{x+18}{3x-2}$

   (c) $|x - 1| + |x + 3| \leq 4$

3. Betrachten Sie die Menge der beschränkten Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h. die Menge $\mathcal{F} := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,\big|\, \exists K \in \mathbb{R} \text{ mit } |f(x)| \leq K, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$. Die Addition zweier beschränkten Funktionen $f, g \in \mathcal{F}$ wird als $(f+g)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, definiert. Die Multiplikation einer beschränkten Funktion $f \in \mathcal{F}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ wird als $(\lambda \cdot f)\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ and $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ mit diesen zwei Operationen einen Vektorraum bildet.

   (b) Betrachten Sie weiters die Funktion $||\cdot||\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$, $f \mapsto sup\{|f(x)| \,\big|\, x \in \mathbb{R}^n\}$, wobei $\mathbb{R}^+$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen bezeichnet. Zeigen sie, dass $||\cdot||$ eine Norm in $\mathcal{F}$ definiert. Somit ist $\mathcal{F}$ ein normierter Vektorraum.

   (c) Geben Sie im oben genannten normierten Vektorraum ein Beispiel an, wo die Dreieckungleichung (d.h. das dritte Axiom in der Definition der Norm) mit echter Ungleichheit erfüllt ist.

   (d) Betrachten Sie die Funktion $I\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \inf\{|f(x)| \,\big|\, x \in \mathbb{R}^n\}$. Ist f eine Norm in dem oben genannten Vektorraum der beschränkten Funktionen?

4. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$. Zwei Elemente $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ im $\mathbb{R}^n$ heißen gleich, wenn $x_i = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

   Untersuchen Sie, ob $(\mathbb{R}^n, d)$ ein metrischer Raum ist, wenn d wie folgt erklärt wird:

   (a) $d(x,y) := \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$,

   (b) $d(x,y) := \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$,

   (c) $d(x,y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$,

   (d) $d(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

5. Fährt man in Frankreich mit der Eisenbahn, so muss man in der Regel über Paris fahren. Dies gibt Anlass zur Definition der folgenden Französischen Eisanbahn-Metrik auf der Ebene $\mathbb{R}^2$: Sei P der Ursprung der Ebene $\mathbb{R}^2$ und bezeichne $d(x,y)$ den euklidischen Abstand zweier Punkte $x \neq y \in \mathbb{R}^2$. Dann definiert man

$$d_P(x,y) := \begin{cases} d(x,P) + d(y,P) & \text{falls } P \text{ nicht auf der Geraden durch } x \text{ und } y \text{ liegt} \\ d(x,y) & \text{sonst} \end{cases}$$

   Außerdem definiert man $d_P(x,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass d_P eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

6. Zeichnen Sie für die folgenden Metriken auf $\mathbb{R}^2$ die offenen Kugeln vom Radius 1 und 2 um die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$:

   (a) die Euklidsche Metrik (vgl. Bsp 4a),

(b) die Maximum-Metrik (vgl. Bsp 4c),

(c) die Manhattan-Metrik (vgl. Bsp 4d),

(d) die Franzsische Eisenbahn Metrik (vgl. Bsp 5),

(e) die diskrete Metrik (vgl. Vorlesung).

7. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$$

8. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Ungleichung

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \leq n\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)$$

gilt für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

9. Beweisen Sie die explizite Darstellung $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ für die durch $a_0 = 2,\ a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$, rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.