Analysis 1 + 2

Rainer E. Burkard
Technische Universität Graz
Institut für Mathematik
Steyrergasse 30
8010 Graz, Austria
Studienjahr 2007/08

24. Februar 2010, 14:30

Inhaltsverzeichnis

Literatur:

Chr. Blatter, *Analysis 1-3*, Heidelberger Taschenbücher, Springer: Berlin

W. Walter, *Analysis 1*, Springer: Berlin

Kapitel 1

Metrische Räume, normierte Vektorräume

Definition 1.1.
Sei $X \neq \emptyset$. Für $a, b, c \in X$ gelte:

> **(M1)** $d(a,b) \geq 0\,,\quad d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
>
> **(M2)** $d(a,b) = d(b,a)$ (Symmetrie)
>
> **(M3)** $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ (Dreiecksungleichung)

(X, d) heißt *metrischer Raum*, d ist eine *Metrik (Abstandsfunktion).*

Beispiel.
Sei $X \neq \emptyset$. Dann ist die diskrete Metrik definiert als:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

Definition 1.2.
Kugeln in (X, d) mit Mittelpunkt a und Radius r:

> *offene Kugel:* $K(a;r) := \{x \in X |\ d(a,x) < r\}$
>
> *abgeschlossene Kugel:* $\overline{K(a;r)} := \{x \in X |\ d(a,x) \leq r\}$

Beispiel.
Offene Intervalle (a, b) sind offene Kugeln in $\mathbb{R}$, abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ sind abgeschlossene Kugeln in $\mathbb{R}$.

Satz 1.1.
Zu jedem Punkt b in der offenen Kugel $K(a;r)$ gibt es einen Radius $r_b > 0$, so dass gilt:

$$K(b;r_b) \subseteq K(a;r)$$

Satz 1.2.

a) Liegt b im Durchschnitt zweier offener Kugeln, so gibt es eine offene Kugel $K(b; r_0)$, die ganz im Durchschnitt enthalten ist.

b) Liegt b im Durchschnitt endlich vieler offener Kugeln, so enthält der Durchschnitt eine offene Kugel mit dem Mittelpunkt b.

Satz 1.3. (Hausdorffsches Trennungsaxiom)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a, b \in X, a \neq b$.
Dann gibt es zwei Radien r_a und r_b, so dass gilt:

$$K(a; r_a) \cap K(b; r_b) = \emptyset$$

Definition 1.3.
Der *Vektorraum* über $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ ist wie folgt definiert:
Sei $\oplus$ eine Verknüpfung in der Menge V, so dass $(V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.
Ferner gelte $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall v, w \in V$:

(V1) $\lambda v \in V$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) \oplus (\mu v)$

(V3) $\lambda(v \oplus w) = (\lambda v) \oplus (\lambda w)$

(V4) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v\,, \quad 1v = v$

Die Elemente von V nennt man *Vektoren*, jene von $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ in diesem Zusammenhang *Skalare*.

Beispiel.
v ... Punkte in der Ebene
λv ... Streckung mit Faktor λ; $\lambda = -1$: Spiegelung am Ursprung
$v + w$ ... Addition zweier Punkte

Definition 1.4.
$\|.\|$ heißt eine *Norm im Vektorraum V über* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, wenn $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall u, v \in V$ gilt:

(N1) $\|v\| \geq 0\,, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Beispiele.

- Maximumsnorm $\|x\|_\infty$
- Manhattan Norm $\|x\|_1$
- Euklidische Norm $\|x\|_2$

Definition 1.5.
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\textit{Skalarprodukt zweier Vektoren: } \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\textit{Euklidische Norm von x: } \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Satz 1.4. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

(a) A. L. Cauchy (1789-1857)

(b) H. A. Schwarz (1843-1921)

Abbildung 1.1

Satz 1.5. (Minkowskische Ungleichung)
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Satz 1.6.
Jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum mit der Metrik

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

Insbesondere gilt:

$$\|x\| = d(x, 0)$$

Beispiele.

- der Raum der Polynome mit der Norm $\|p(x)\| := |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$
- der Raum der beschränkten, reellwertigen Funktionen mit der Norm $\|f\| := \sup |f(x)|$

Definition 1.6.
(Offene) Einheitskugel $K(0; 1)$ in $(V, \|.\|) : K(0; 1) := \{x \in V | \; \|x\| \; < 1\}$.

Satz 1.7.
Es gilt:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$
$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$$

Kapitel 2

Folgen

Definition 2.1.
Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ heißt *Folge*. Folgen können explizit (durch Angabe des allgemeinen Gliedes) oder rekursiv angegeben werden.

Beispiele.

- Explizite Folge: $1, 4, 9, \ldots, \quad a_n = n^2$

- Rekursiv definierte Folge, z.Bsp. *Fibonacci-Folge*

$$a_1 := a_2 := 1,\, a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$

Definition 2.2.
Die Folge (x_n) im metrischen Raum (X, d) hat

- den *Grenzwert* $a \in X$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$$

- einen *Häufungspunkt* $a \in X$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n\, \exists n_0 \geq n : d(x_{n_0}, a) < \varepsilon$$

Hat (a_n) den Grenzwert a, so schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Die Folge *konvergiert*.
Eine Folge, die nicht konvergiert, *divergiert*.
Eine Folge, deren Grenzwert 0 ist, heißt *Nullfolge*.

Beachte: Das Konvergenzverhalten einer Folge und ihr Grenzwert hängen nicht von den Anfangsgliedern der Folge ab.

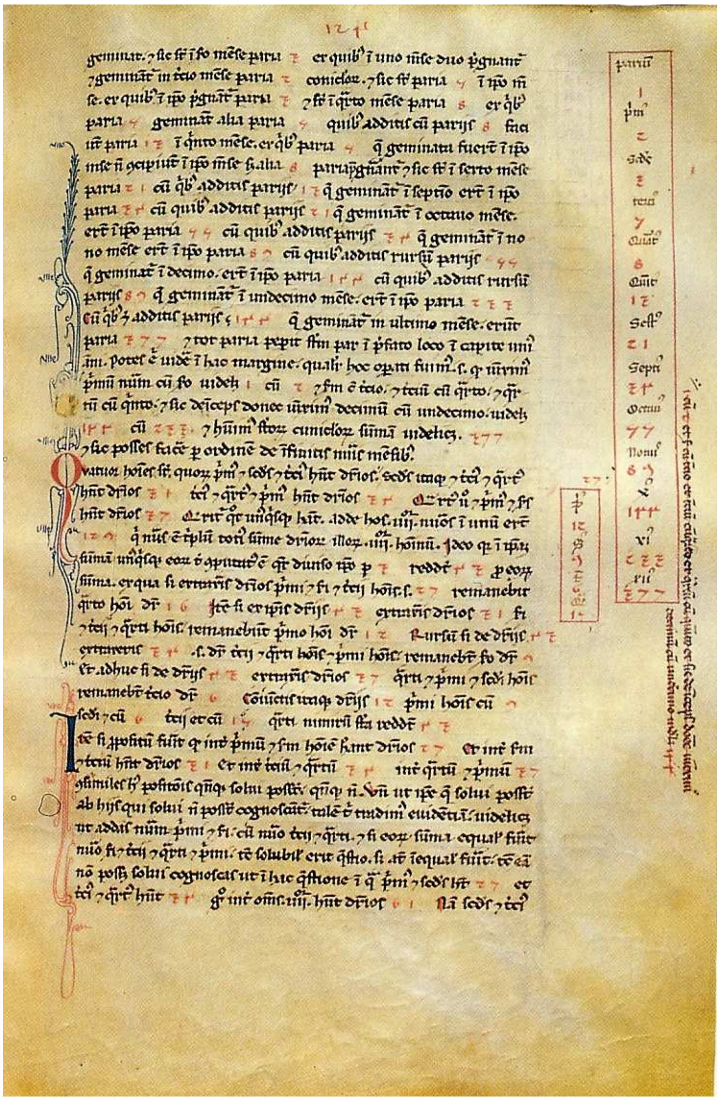


Abbildung 2.1: Liber abacci von Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci: Beschreibung der Kaninchenaufgabe mit der Fibonacci-Reihe

Satz 2.1.
$(x_n) \to a \Leftrightarrow (d(x_n, a)) \to 0$

Definition 2.3.
Eine Folge (x_n) in einem normierten Vektorraum X heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante M gibt, so dass für alle n gilt:

$$\|x_n\| \leq M$$

Satz 2.2.
Jede konvergente Folge in einem normierten Vektorraum ist beschränkt und besitzt nur einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert.

Achtung: Eine beschränkte Folge muß nicht konvergent sein: $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

Definition 2.4.
Eine *Teilfolge* der Folge (x_n) wird angegeben durch (x_{n_k}) mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Satz 2.3.
Jede Teilfolge einer gegen a konvergenten Folge konvergiert ebenfalls gegen a.

Satz 2.4.
Besitzt die Folge (x_n) den Häufungspunkt a, so besitzt (x_n) eine gegen a konvergente Teilfolge.

Satz 2.5. (Vergleichskriterium)
Ist (r_n) eine reelle Nullfolge und gilt für $x_n \in \mathbb{R}^k(\mathbb{C}^k)$:

$$\|x_n\| \leq r_n \quad \forall n = 1, 2, \ldots ,$$

dann ist (x_n) eine Nullfolge.

Satz 2.6.
In einem normierten Vektorraum gilt:

$$(x_n) \to a,\ (y_n) \to b \ \Rightarrow \ (x_n + y_n) \to a + b$$

Satz 2.7.
Für reelle Zahlenfolgen gilt:

(1) (x_n) beschränkt, $(y_n) \to 0 \ \Rightarrow \ (x_n y_n) \to 0$

(2) $(x_n) \to a,\ (y_n) \to b \ \Rightarrow \ (x_n y_n) \to ab$

(3) $(x_n) \to a \neq 0 \ \Rightarrow \ (\frac{1}{x_n}) \to \frac{1}{a}$

(4) $(x_n) \to a,\ (y_n) \to b,\ x_n \leq y_n\ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow \ a \leq b$

(5) $(a_n) \to a,\ (b_n) \to a,\ a_n \leq x_n \leq b_n\ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow \ (x_n) \to a$

Satz 2.8.
Konvergiert eine Folge von Vektoren (x_n) gegen den Vektor a, dann konvergiert die Folge der Komponenten von x_n gegen die Komponenten von a.

Satz 2.9.
Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$

Satz 2.10.
Sind $a_1, \ldots, a_p$ positive reelle Zahlen, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$$

Definition 2.5.
Eine reelle Folge (x_n) heißt *monoton wachsend*, wenn gilt:

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(x_n) heißt *monoton fallend*, wenn gilt:

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Satz 2.11.
Jede monotone, beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Grenzwert:

$a = \sup x_n$ für (x_n) monoton wachsend

$a = \inf x_n$ für (x_n) monoton fallend

Achtung: Diese Aussage gilt nicht im Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen!

Beispiel.
Die rekursiv definierte Folge (a_n) definiert durch

$$a_0 := 2,\ a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$$

konvergiert gegen $\sqrt{2}$.

Satz 2.12. (**Satz von Bolzano-Weierstraß**)
Jede beschränkte, reelle Zahlenfolge besitzt einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.

Definition 2.6.
(x_n) ist eine *Cauchy-Folge* im metrischen Raum (X, d), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall m, n \geq n_0 :\ d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Satz 2.13.
Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Cauchy-Folge.

Definition 2.7.
Metrische Räume, in denen jede Cauchy-Folge konvergiert, heißen *vollständige* metrische Räume. Normierte Vektorräume, in denen jede Cauchy-Folge konvergiert, heißen *Banachräume*.

Satz 2.14.
Die Räume $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{C}^k$ sind Banachräume.

Definition 2.8.
Der *Limes superior* a^* einer reellen Zahlenfolge (a_n) ist das Supremum der Häufungspunkte von (a_n), d.h. $\forall\,\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N} : a^* + \varepsilon < a_n$.
Der *Limes inferior* a_* ist das Infimum der Häufungspunkte von (a_n), d.h. $\forall\,\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N} : a_n < a_* - \varepsilon$.

Beispiel.

$$a_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{für } n \equiv 1(3) \\ 0 & \text{für } n \equiv 2(3) \\ -1 + \frac{1}{n} & \text{für } n \equiv 0(3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a^* = 1,\ a_* = -1$$

Definition 2.9.
Eine reelle Zahlenfolge (x_n) ist *uneigentlich konvergent* mit Grenzwert ∞, wenn gilt:

$$\forall\, K\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 :\ x_n \geq K$$

<u>Notation:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Rechenregeln:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, y_n \geq K\ \forall n$ mit $K \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, 0 < K \leq y_n\ \forall n\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \infty$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, x_n > 0\ \forall n\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$

Kapitel 3

Reihen

Beispiel.
Gedankenexperiment: Achilles und die Schildkröte (Zenon von Elea, ca. 490-430 v. Chr.)

Beispiele.
Arithmetische Reihe: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$
Harmonische Reihe: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
Geometrische Reihe: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
Alternierende harmonische Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$
Potenzreihe: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
Fourier-Reihe: $1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos 3x + \dots$

Definition 3.1.
Die *Partialsummen* einer Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ sind definiert als:

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ \dots,\ s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Definition 3.2.
Es seien $a_0, a_1, a_2, \dots$ Elemente eines Banachraumes B.
Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ heißt *konvergent*, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) konvergiert.
Es gilt also per Definition:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

Eine Reihe, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Beispiele.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert

(2) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Satz 3.1.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\, \forall m > n \geq n_0 : \left\| \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \right\| < \varepsilon$

Satz 3.2.
Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist die Folge (a_n) eine Nullfolge.

Achtung: Die Umkehrung des Satzes 3.2 gilt nicht (siehe Satz 3.3)!

Folgerung.
Ist (a_n) keine Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Beispiel.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ $\Rightarrow$ (z^n) ist keine Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ divergiert.

Satz 3.3.

- **(a)** Sei $a_n \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.
- **(b)** Die harmonische Reihe ist divergent.

Rechenregeln für konvergente Reihen:
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = s'$. Dann gilt:

- **(1)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = s + s'$
- **(2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda s$
- **(3)** Gilt für die reellen Zahlen $a_n,\ b_n$ die Beziehung $a_n \leq b_n$ für alle n, dann gilt $s \leq s'$.

3.1 Absolut konvergente Reihen

Definition 3.3.
Sei $a_n \in B$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ konvergiert.

Satz 3.4.
Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Achtung: Die Umkehrung des Satzes 3.4 gilt nicht!

Satz 3.5. (Majorantenkriterium)
Gilt für alle a_n mit $n \geq n_0 : \|a_n\| \leq c_n$ und ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

Beispiel.
Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n + \sqrt[n]{n^5}}{(2n - \sqrt{n})^3}$$

ist konvergent.

Satz 3.6. (Minorantenkriterium für reelle Reihen)
Gilt für alle $a_n \in \mathbb{R}$ mit $n \geq n_0 : a_n \geq c_n > 0$ und ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beispiel.
Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n} - 2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}$$

ist divergent.

Satz 3.7.
Gegeben seien zwei reelle Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_n,\ b_n \geq 0$.
Existiert $A := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ und gilt $0 < A < \infty$, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Das Majorantenkriterium liefert mit der geometrischen Reihe als Vergleichsreihe:

Satz 3.8. (Wurzelkriterium)
Sei $a_n \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$.

(a) $\exists q : 0 \leq q < 1$ mit $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ für alle $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(b) Ist $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ für unendlich viele $n \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Die Bedingung von Satz 3.8 (a) ist insbesonders erfüllt, wenn gilt:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

Die Bedingung von Satz 3.8 (b) ist insbesonders erfüllt, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$

Achtung: Für $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ ist <u>keine</u> Aussage möglich!

Beispiel.
Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$$

ist konvergent für $|x| < 1$.

Etwas schwächer ist:

Satz 3.9. (Quotientenkriterium)
Sei $a_n \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$.

(a) $\exists q : 0 \leq q < 1$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ für alle $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(b) Ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ für unendlich viele $n \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Die Bedingung von Satz 3.9 (a) ist insbesonders erfüllt, wenn gilt:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

Achtung: Aus dem Versagen eines Konvergenzkriteriums folgt nicht, dass die Reihe divergiert (z.Bsp.: Quotientenkriterium angewandt auf $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). Die Divergenz muß explizit nachgewiesen werden.

Satz 3.10.
Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Definition 3.4.
$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ mit $e \ldots$ Eulersche Zahl ($e = 2,71828...$)

Zählt man die Buchstaben der Wörter des folgenden Gedichts mod 10, so ergibt sich die Zahl e auf 111 Dezimalen genau. Das ist bis zur ersten Stelle, auf die zwei Nullen folgen.

Es geschah - o Schreckenshandlung! -
im Verlaufe schlimmster Wandlung.
Da erwachte ganz fatal
allerhand versteckte Qual,
hatte es gar eilig
und geriet nachteilig.

Ungemütliche Gedanken
drohten sich schwarz aufzuranken.
Der Beleg in wilder Flucht!
So wird weiterhin gesucht.
Lebhaft, Haare raufend,
ja auch kräftig schnaufend.

Angefacht und leicht entflogen,
rauschten ungeheure Wogen.
Furchtbar tobte starkes Leid.
Fruchtlos schien selbst Emsigkeit.
Hastverkrampftes Treiben,
sollst du nutzlos bleiben?

So wird vielenorts gesehen
echtes stures Amtsgeschehen.
Angeordnet ein Gebot,
das genau nach Weisung droht.
Machtvoll, doch recht traurig,
schemenhaft und schaurig.

In dergleichen dumpfen Schauern
magst du nicht verzweifelt kauern.
Sollte dies zu grausig sein,
so betreib doch Scherz allein!
Mit gezielter Schrumpfung
schwindet die Verstumpfung.

aus: A. Aigner, Tangenten an den Frohsinn, Graz, 1978

Satz 3.11. (Cauchyscher Verdichtungssatz)
Sei $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$, und die Folge sei monoton fallend. Dann hat die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$

Beispiel.
Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $0 \leq \alpha \leq 1$.

Definition 3.5.
Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente, reelle oder komplexe Reihen und ist $c_r := \sum\limits_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}$, dann nennt man $\sum\limits_{r=0}^{\infty} c_r$ das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 3.12.
Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente, reelle oder komplexe Reihen, so ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum\limits_{r=0}^{\infty} c_r$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Satz 3.13.
Die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion* lautet:

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

3.2 Bedingt konvergente Reihen mit reellen Koeffizienten

Definition 3.6.
Eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, heißt *bedingt konvergent*, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergiert.

Beispiel.
Die alternierende, harmonische Reihe ist bedingt konvergent.

Satz 3.14. (Leibniz-Kriterium)
Gilt für die Glieder a_n einer Reihe, dass $a_n \geq 0$ und (a_n) eine monotone Nullfolge ist, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ bedingt konvergent.

Lemma 3.15.
Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent, so divergiert sowohl die Reihe bestehend aus den positiven a_n-Gliedern, wie auch die Reihe bestehend aus den negativen a_n-Gliedern.

Satz 3.16. (Riemannscher Umordnungssatz)
Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent, so kann man die Reihenglieder derart umordnen, dass die neue Reihe divergiert oder auch gegen jede beliebige Zahl $C \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Zum Beweis dieses Satzes schrieb Riemann (die positiven Glieder der gegebenen Reihe bezeichnet er mit a, die negativen mit b):

> "Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a, als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d.h. die Reihe wird gegen C convergiren."

Abbildung 3.1: Bernhard Riemann (1826–1866)

Demgegenüber gilt:

Satz 3.17. (Umordnungssatz)
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine bijektive Abbildung, $b_n := a_{\varphi(n)}$. Dann ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Kapitel 4

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

4.1 Stetigkeit

Definition 4.1.
Gegeben seien zwei metrische Räume (X, d) und (X', d'). Eine Funktion $f : X \to X'$ heißt *stetig im Punkt* $a \in X$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \forall x \in X \,\text{mit}\, d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Eine Funktion heißt *stetig auf ganz* X, wenn f stetig in jedem Punkt $a \in X$ ist.

Definition 4.2.
Eine *Umgebung* $U(x)$ des Punktes x ist eine Menge, die eine offene Kugel mit dem Mittelpunkt x enthält. Speziell ist eine δ*-Umgebung* $U_\delta(x)$ die offene Kugel $K(a; \delta)$.

Somit läßt sich die Stetigkeit im Punkt $a \in X$ folgendermaßen ausdrücken:

$$f \,\text{ist stetig in}\, a \in X, \text{wenn}\, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x \in U_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

Beispiele.

- Konstante Funktionen sind stetig
- Identische Abbildungen sind stetig
- Treppenfunktionen sind in ihren Sprungstellen nicht stetig
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist in keinem Punkt stetig.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{teilerfremd} \end{cases}$
  ist nur in den irrationalen Zahlen $x \notin \mathbb{Q}$ stetig.

Satz 4.1.
Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig in a und gilt $f(a) > 0$, dann gibt es eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$, so dass für jedes $x \in U_\delta(a)$ gilt:

$$f(x) > 0$$

Definition 4.3.
Eine Funktion $f : X \to X'$ ist *quasikontrahierend* (*genügt einer Lipschitz-Bedingung*), wenn es eine Konstante L gibt (*Lipschitz-Konstante*), so dass gilt:

$$d'(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Abbildung 4.1: Rudolf Lipschitz (1832–1903)

Satz 4.2.
Ist $f : X \to X'$ quasikontrahierend, dann ist die Abbildung f auf ganz X stetig.

Beispiele.

(1) $X = \mathbb{R}^n, X' = \mathbb{R}, f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ (Koordinatenfunktion) hat Lipschitzkonstante $L = 1$.

(2) $X = X' = \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$ hat Lipschitzkonstante $L = 1$.

Satz 4.3.
Sei $f : X \to X'$. f ist stetig in $a \in X$ genau dann, wenn für *jede* gegen a konvergente Folge $(x_n) \to a, x_n \in X$, gilt:

$$(f(x_n)) \to f(a)$$

Satz 4.4.
Sind die reell- oder komplexwertigen Funktionen f und g stetig in $a \in X$, dann sind es auch die Funktionen $|f|, f+g, f \cdot g$. Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist nur stetig, wenn zusätzlich $g(a) \neq 0$ gilt.

Analoge Resultate gelten für die Stetigkeit auf der Menge X.

Satz 4.5.
Ist $f : X \to X'$ stetig in b und $g : X' \to X''$ stetig in $b = f(a)$, dann ist $g \circ f : X \to X''$ stetig in a.

Polynome sind stetige Funktionen, rationale Funktionen sind stetig im Bereich, wo der Nenner nicht Null wird.

4.2 Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.4.
Eine *punktierte ε-Umgebung* $\dot{U}_\varepsilon(a)$ ist $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Definition 4.5.
Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* der Menge $A \subseteq X$, wenn in jedem $\dot{U}_\varepsilon(x)$ mindestens ein Element von A liegt.

Anmerkungen.

(1) Ein Häufungspunkt braucht nicht zu A gehören, zum Beispiel hat das offene Intervall $(0,1)$ die Häufungspunkte 0 und 1, die nicht zum Intervall gehören.

(2) Ist (X, d) ein metrischer Raum und a Häufungspunkt der Menge $A \subseteq X$, dann gibt es eine Folge (x_n), $x_n \in A$, $x_n \neq a$, die gegen a konvergiert.

Beispiel.
Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt der Menge $A = \mathbb{Q}$.

Achtung: Ist x Häufungspunkt der Folge (x_n), so braucht x nicht Häufungspunkt der Menge $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ sein. Die Folge $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1, ...)$ hat die Häufungspunkte 0 und 1, aber die Menge $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat nur den Häufungspunkt 0.

Definition 4.6.
Ein Punkt $a \in A$ heißt *isolierter Punkt* von A, wenn es eine Umgebung $U(a)$ gibt, so dass $U(a) \cap A = \emptyset$.

Ein isolierter Punkt ist somit nie ein Häufungspunkt von A.

Satz 4.6.
In einem isolierten Punkt $a \in A$ ist jede Funktion $f : A \to X'$ stetig.

Definition 4.7.
In $\mathbb{R}$ wird eine *ε-Umgebung $U_\varepsilon(\infty)$ von ∞* definiert durch:

$$U_\varepsilon(\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{\varepsilon}\}$$

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ∞ als *uneigentlichen Häufungspunkt*, wenn gilt:

$$A \cap U_\varepsilon(\infty) \neq \emptyset \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

Beispiele.

- $\mathbb{N}$ besitzt den uneigentlichen Häufungspunkt ∞.
- $[a, \infty)$ besitzt den uneigentlichen Häufungspunkt ∞.

Definition 4.8.
Die Funktion $f : A \to X'$ besitzt im Häufungspunkt a von A den Grenzwert a', wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap A : d'(f(x), a') < \varepsilon$$

Notation: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a'$

Beispiel. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$.

Anmerkung.
Eine Funktion $f : A \to X'$ hat im Punkt a höchstens einen Grenzwert. Im Falle $a \in A$ muß dieser nicht mit dem Funktionswert $f(a)$ übereinstimmen.

Satz 4.7.
$a' = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n), $x_n \in A$, $x_n \neq a$, die gegen a konvergiert, gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a'$$

Satz 4.8.
$f : A \to X'$ und $a \in A$ sei Häufungspunkt von A. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } a \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

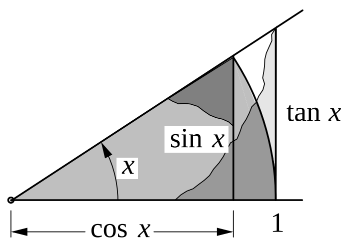
d.h. f ist stetig in a genau dann, wenn der Grenzwert der Funktion für $x \to a$ mit dem Funktionswert $f(a)$ übereinstimmt.

Definition 4.9.
$a \in A$ ist eine *hebbare Unstetigkeitsstelle von* f, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert und $\neq f(a)$ ist.

Beispiel. $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x = 0$. Da aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

kann die Unstetigkeit behoben werden, indem man $f(0) := 1$ festsetzt. (vgl. Abbildung 4.2)



$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\sin x \cos x}{2} & \leq & \frac{x}{2} & \leq & \frac{1}{2}\tan x \\
\cos x & \leq & \frac{x}{\sin x} & \leq & \frac{1}{\cos x} \\
\to 1 & & & & \to 1
\end{array}$$

Abbildung 4.2: Skizze für $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Satz 4.9.
$A \subseteq X, X'$ vollständiger metrischer Raum, $f : A \to X'$. Dann gilt:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \;\forall x, y \in \dot{U}_\delta(a) \cap A : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

4.3 Rechnen mit Grenzwerten

Sei $f : A \to X'$, wobei $X' = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n, n \geq 1$. Weiters sei a ein Häufungspunkt der Menge A.

Es gilt:

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \|f(x)\| = 0$

(2) $\|f(x)\| \leq r(x)\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap A$ und $\lim_{x\to a} r(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) = 0$

(3) Ist $\lim_{x\to a} f(x) = c, \lim_{x\to a} g(x) = d$, dann gilt:

- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = c + d$
- $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = c \cdot d$ (gilt auch für Skalar- und Vektorprodukt)
- Für reellwertige, auf A definierte Funktionen f und g mit $\lim_{x\to a} g(x) = d \neq 0$ gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$$

- Ist $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap A \;\Rightarrow\; c \leq d$

(4) Gilt $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap A$ und ist $c = \lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x)$, dann existiert $\lim_{x\to a} g(x)$ und ist c.

Beispiele.

- $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht. (Betrachte Testfolge (x_n) mit $x_n := \frac{2}{n\pi}$.)
- $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Satz 4.10.
Sei $f : A \to B$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = b$ und sei $g : B \to C$ mit $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Weiters sei entweder g stetig in b oder es existiert ein $\delta > 0$ sodass $f(x) \neq b\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a)$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = c$$

Übungsaufgabe: Geben Sie ein Beispiel an, für das $\lim_{x\to a} f(x) = b$ und $\lim_{y\to b} g(y) = c$ gilt, aber $\lim_{x\to a} g(f(x)) \neq c$ ist.

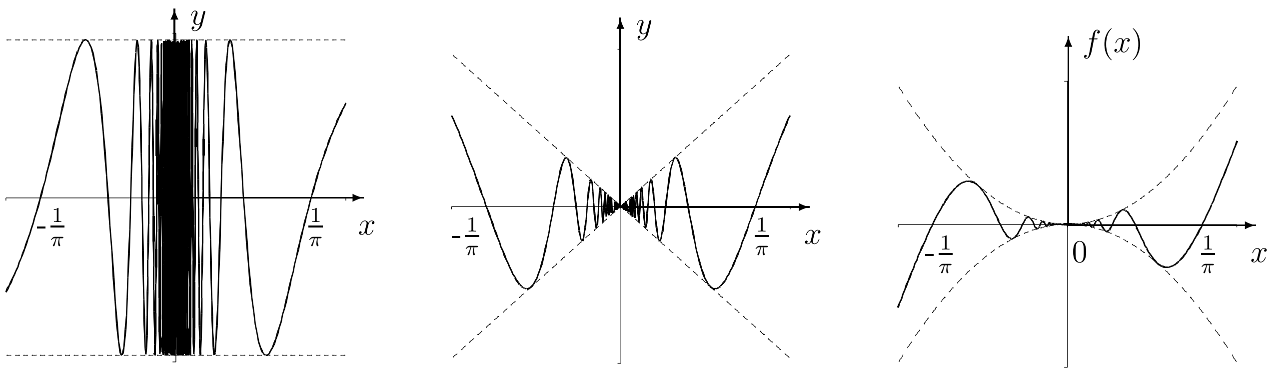


Abbildung 4.3: Die Graphen der Funktionen $\sin \frac{1}{x}$, $x \sin \frac{1}{x}$, $x^2 \sin \frac{1}{x}$

Beispiele.

- $\lim\limits_{x\to\infty} x \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^n - 1\right] = n$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4 + x \sin \frac{1}{x}} = 2$

Satz 4.11.

(a) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z}(e^z - 1) = 1$

(b) e^z ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

4.4 Einseitige Stetigkeit, einseitige Grenzwerte

Definition 4.10.
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ hat für $x \to a$ den *rechtsseitigen Grenzwert* c, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = c$, wenn für jede Folge (x_n) im Intervall (a,b), die gegen a konvergiert, $(f(x_n)) \to c$ gilt.
Diese Definition gilt entsprechend für $a = -\infty$ beziehungsweise für $c = \pm\infty$.
Der *linksseitige Grenzwert* $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ wird analog definiert.

Beispiele.

(1) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to n+} [x] = n, \quad \lim\limits_{x\to n-} [x] = n - 1$

Definition 4.11.
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f *linksstetig in* a, wenn $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$, beziehungsweise *rechtsstetig in* a, wenn $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Anmerkungen.

(1) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ genau dann, wenn $\exists \lim\limits_{x \to a-} f(x), \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ und es gilt $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

(2) f ist stetig in a genau dann, wenn f in a links- und rechtsstetig ist.

Definition 4.12.
a ist eine *Sprungstelle*, wenn $\lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

4.5 Abgeschlossene und kompakte Mengen

Definition 4.13.
Sei (X, d) ein metrischer Raum. $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn jeder Häufungspunkt von A zu A gehört. Nimmt man zu einer Menge A ihre Häufungspunkte hinzu, erhält man die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ von A.

Es gilt stets:

- $A \subseteq \bar{A}$
- A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\bar{A} \subseteq A$, also $\bar{A} = A$.

Anmerkung.
Die Menge A ist abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (a_n) in A der Grenzwert der Folge zu A gehört.

Beispiele.

- Die Intervalle $[a,b]$ und $[a,\infty)$ sind abgeschlossene Mengen.
- Die Mengen (a,b) und $\{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,\ldots\}$ sind nicht abgeschlossen.

Satz 4.12.
Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so sind die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in X \mid f(x) \leq 0\} \\ B &:= \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} \end{aligned}$$

abgeschlossen.

Satz 4.13.
Sind A und B abgeschlossen, dann auch $A \cap B$ und $A \cup B$.

Übungsaufgabe: Ist der Durchschnitt und die Vereinigung von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen?

Beispiele.

1. Die Einheitssphäre $s^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ist abgeschlossen.
2. Der n-dimensionale Einheitswürfel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2, ..., n\}$ ist abgeschlossen.

Definition 4.14.
Eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ heißt *kompakt*.

Satz 4.14.
Ist A eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, so besitzt jede Folge (x_n) in A einen Häufungspunkt $x_0 \in A$.

Achtung: Eine entsprechende Aussage gilt nicht in unendlichdimensionalen Räumen:
Sei $l_2 := \{(x_n) \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ der Raum aller reellen Folgen, deren Quadratsumme endlich ist. Die Folge der Einheitsvektoren $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ in l_2 liegt in der abgeschlossenen und beschränkten Einheitskugel $K(0; 1) \subseteq l_2$, hat aber keinen Häufungspunkt.

4.6 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

A sei eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$; $\quad f : A \to \mathbb{R}$

Definition 4.15.
$f(x)$ nimmt in x_0 ein *globales Maximum* an, wenn gilt:

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in A$$

$f(x)$ nimmt in x_0 ein *globales Minimum* an, wenn gilt:

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in A$$

Satz 4.15. (Satz vom Maximum)(Weierstraß)
Ist A kompakt und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f in einem Punkt von A das globale Maximum (das globale Minimum) an.

Anmerkung. Wenn der Definitionsbereich der Abbildung f nicht kompakt ist oder wenn f nicht stetig ist, dann besitzt die Abbildung f möglicherweise kein Maximum und Minimum. (Beispiele!)

Satz 4.16.
Ist A kompakt und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(A)$ kompakt. Insbesondere ist dann $f(A)$ abgeschlossen.

Satz 4.17. (Zwischenwertsatz von Bolzano, 1817)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann besitzt f in (a, b) mindestens eine Nullstelle.

Abbildung 4.4: Bernard Bolzano, geb. 1781 in Prag, gest. 1848 in Prag

Korollar.
Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Anwendung: Bisektionsverfahren

Satz 4.18.
Sei f eine stetige Abbildung eines Intervalls I in $\mathbb{R}$. $\alpha := \inf\{f(x) \mid x \in I\}$, $\beta := \sup\{f(x) \mid x \in I\}$. Dann nimmt f jeden Wert in (α, β) für mindestens einen Wert aus dem Intervall I an.

4.7 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 4.16.
$f : X \to X'$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x, y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

δ ist dabei von der betrachteten Stelle x unabhängig.

Unterschied zur Stetigkeit: δ wird nicht für einen Punkt gewählt, sondern muß für alle x gültig sein.

Anmerkungen.

(1) Ist f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig

(2) Sind f und g gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist gleichmäßig stetig

Beispiele.

(1) $f(x) = x^2$ ist auf $[-1, 1]$ gleichmäßig stetig

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, 1)$ nicht gleichmäßig stetig

Satz 4.19.
Eine quasikontrahierende Abbildung ist gleichmäßig stetig.

Satz 4.20.
Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ kompakt und $f : A \to X'$ stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.

4.8 Der Fixpunktsatz von Banach

Definition 4.17.
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to X$. Die Abbildung f heißt *kontrahierend*, wenn $\forall x, y \in X$ gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y) \quad \text{mit } 0 \leq K < 1$$

Definition 4.18.
Sei $f : X \to X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung f, wenn gilt:

$$f(x) = x$$

Satz 4.21. (Fixpunktsatz von Banach)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung mit der Lipschitzkonstanten $K, 0 \leq K < 1$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $x^* \in X$.
Die Rekursion

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

führt für beliebige $x_0 \in X$ auf eine gegen x^* konvergente Folge

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

und es gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_0, x_1)$$

Abbildung 4.5: Stefan Banach (1892-1945)

4.9 Monotone Funktionen

Sei $I = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ und $b = +\infty$ zugelassen sind. $f : I \to \mathbb{R}$.

Lemma 4.22.
Ist f auf I monoton wachsend, so existiert der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ und es gilt:

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in (a, b)\}$$

Satz 4.23.
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so existieren in jedem $x_0 \in I$ die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = c_-$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = c_+$ und es gilt:

$$c_- \leq f(x) \leq c_+$$

Definition 4.19.
Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion zwischen den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der Menge A gibt.
Eine nichtendliche Menge heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Anmerkung.

1. Die rationalen Zahlen sind abzählbar.
2. Die reellen Zahlen sind überabzählbar.

Beweise mittels des *Diagonalisierungsverfahrens von Cantor*.

Satz 4.24.
Eine monotone Funktion ist stetig bis auf höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

d.h. eine monotone Funktion hat keine, oder endlich viele oder im schlimmsten Fall abzählbar viele Sprungstellen.

Satz 4.25.
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, dann bildet f das Intervall I bijektiv auf ein Intervall J ab. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist ebenfalls streng monoton und stetig.

Kapitel 5

Elementare Funktionen

5.1 Polynome

Definition 5.1.
Ein *Polynom* ist ein Ausdruck der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad \text{mit}\, a_n \neq 0$$

wobei n der *Grad* des Polynoms ist und a_n der *führende Koeffizient* ist.
Sind alle $a_i \in \mathbb{R}$, so spricht man von einem *reellen Polynom*, bei $a_i \in \mathbb{C}$ von einem *komplexen Polynom*.

Berechnung des Polynomwertes $p(x_0)$ mittels Hornerschema: (Ruffini 1804, Horner 1819)

$$\left.\begin{array}{lllll} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\ 0 & b_n x_0 & b_{n-1} x_0 & \ldots & b_1 x_0 \end{array}\right\} +$$

$$\overline{\begin{array}{lllll} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 = p(x_0) \end{array}}$$

Satz 5.1. Jedes reelle Polynom n-ten Grades $(n \geq 1)$ besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Satz 5.2. (Fundamentalsatz der Algebra, Gauss)
Sei $n \geq 1$. Jedes (komplexe) Polynom n-ten Grades besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen $p(z_i) = 0$ mit $i = 1, \ldots, n$.

Tritt eine Nullstelle z_i mehrfach, z. Bsp. α_i-fach auf, so nennt man α_i die *Vielfachheit* der Nullstelle z_i.

Folgerung.
Hat ein Polynom $p(x)$ n-ten Grades $n + 1$ Nullstellen, dann ist $p(x)$ das Nullpolynom.

Folgerung.
Jedes Polynom n-ten Grades läßt sich in $\mathbb{C}$ in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen:

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

Abbildung 5.1: Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Für jedes Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ gilt: a_{n-1} ist die negative Summe aller (reellen oder komplexen) Nullstellen, a_0 ist $(-1)^n$ mal dem Produkt aller Nullstellen. Aus diesen beiden Bedingungen läßt sich oft eine der Nullstellen erraten.

Satz 5.3.
Ist z_0 eine komplexe Nullstelle des reellen Polynoms $p(x)$, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von $p(x)$.

Folgerung.
Jedes reelle Polynom läßt sich im Reellen in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegen.

Satz 5.4. (Gleichheit von Polynomen)
Zwei Polynome n-ten Grades sind genau dann gleich, wenn sie an $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stellen $x_1, \ldots, x_{n+1}$ übereinstimmen.

Interpolationsproblem: Für $n+1$ paarweise verschiedene "Stützstellen" $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und vorgegebene Werte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ wird ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ gesucht, für das gilt:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Satz 5.5.
Das Interpolationsproblem hat eine eindeutig bestimmte Lösung.

Lagrange'sche Interpolationsformel:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Die nummerische Berechnung des Interpolationspolynoms erfolgt am besten durch Newton's Verfahren der dividierten Differenzen, das sich auch gut mit dem Hornerschema kombinieren läßt.

5.2 Rationale Funktionen

Definition 5.2.
Eine *rationale Funktion* ist von der Form $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen $p(x), q(x)$, wobei $r(x)$ nur für x definiert ist, für die $q(x) \neq 0$ gilt. Die x-Werte mit $q(x) = 0$ heissen *Polstellen.*

Durch Polynomdivision kann man erreichen, dass

$$r(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$$

wobei $p_1(x), p_2(x)$ Polynome sind und grad $p_2(x) <$ grad $q(x)$ gilt.

Satz 5.6. (Satz von der Partialbruchzerlegung)
Es seien $p(x), q(x)$ reelle Polynome mit grad $p(x) <$ grad $q(x)$ und für $q(x)$ gelte

$$q(x) = a(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r}(x^2 + a_1 x + b_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + a_s x + b_s)^{\beta}_s$$

d.h. $x_1, \dots, x_r$ sind paarweise verschiedene reelle Nullstellen mit den Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, und die paarweise verschiedenen quadratischen Polynome $(x^2 + a_i x + b_i)$ haben keine reelle Nullstellen. Dann gilt:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ik}}{(x - x_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{l=i}^{\beta_j} \frac{B_{jl}x + C_{jl}}{(x^2 + a_j x + b_j)^l} \right)$$

5.3 Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ ist stetig für alle $z \in \mathbb{C} (x \in \mathbb{R})$.
Es gilt:

- $e^0 = 1$
- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
- $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$

Satz 5.7.

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$

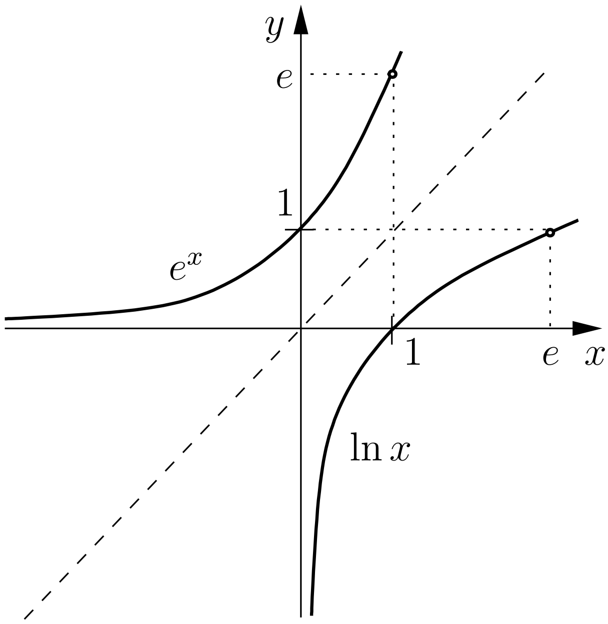
Satz 5.8.
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. e^x ist streng monoton wachsend

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ für jedes feste n, d.h. die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenzfunktion.

Da e^x auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, existiert die Umkehrfunktion, die *natürlicher Logarithmus* $\ln x$ genannt wird.



Es gilt:

- $\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

Satz 5.9.
Für den natürlichen Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gilt:

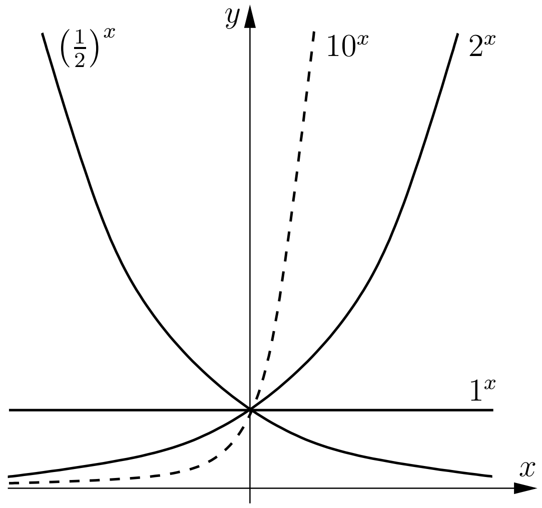
1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty\,,\ \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

3. $\ln 1 = 0\,,\ \ln e = 1$

Definition 5.3.
Sei $a > 0$ fest. Die *allgemeine Exponentialfunktion* ist definiert als:

$$a^x := e^{x \ln a}$$



Satz 5.10. (Rechenregeln für die allgemeine Exponentialfunktion)

1. a^x ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
   $a^x a^y = a^{x+y}$
   $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
   $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
3. $a^x b^x = (ab)^x$

Die Umkehrfunktion zur allgemeinen Exponentialfunktion ist der *Logarithmus zur Basis a*, wobei $a \neq 1$ ist. Es gilt:

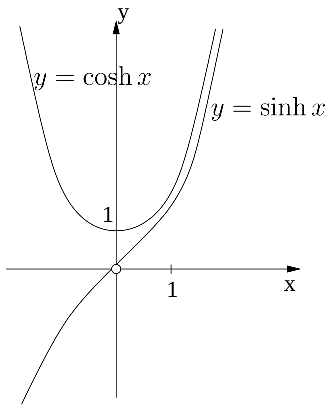
$$_a\log x = ({_a\log b})({_b\log x})$$

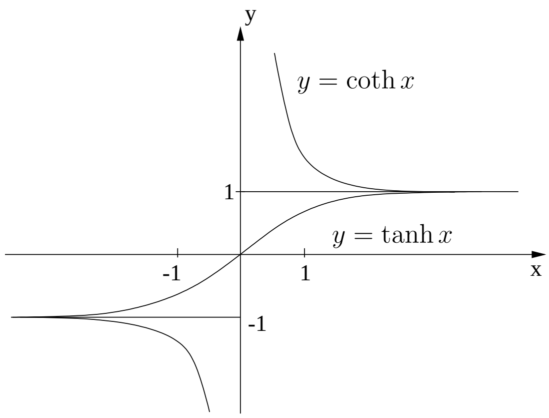
5.4 Die Hyperbelfunktion

Trennt man die Exponentialfunktion e^x in ihren symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil, so erhält man die *Hyperbelfunktionen*:

Cosinus hyperbolicus: $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Sinus hyperbolicus: $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$





$$\lim_{x\to\infty} \cosh x - \sinh x = 0.$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

Als Summe (Differenz) stetiger Funktionen sind Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus stetige Funktionen.
Trennt man in der Reihenentwicklung von

$$e^x = 1 + (x) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Real- und Imaginärteil, erhält man als Reihen für Cosinus und Sinus:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cosh x & = & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - +... \\ \sinh x & = & x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - +... \end{array}}$$

Aus $e^{x+y} = e^x e^y$ folgen die *Additionssätze*:

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \end{aligned}$$

Weiters definiert man:

Tangens hyperbolicus: $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Cotangens hyperbolicus: $\sinh x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$ für $x \neq 0$.

Die *Umkehrfunktionen* lauten:

Area cosinus hyperbolicus: $\operatorname{arcosh} x \ : \ [1, \infty) \to R_+$

Area sinus hyperbolicus: $\operatorname{arsinh} x \ : \ R \to R$

Area tangens hyperbolicus: $\operatorname{artanh} x \ : \ R \to (-1,1)$

Area cotangens hyperbolicus: $\operatorname{arcoth} x \ : \ R \setminus [-1,1] \to R$

Man kann die Umkehrfunktionen auch durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken, z. Bsp.

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

5.5 Trigonometrischen Funktionen

Zerlegt man e^{ix} in seinen Real- und Imaginärteil, so erhält man:

Cosinus: $\cos x := \Re(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

Sinus: $\sin x := \Im(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Somit gilt die *Euler'sche Formel*:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Der Cosinus ist eine gerade (symmetrische) Funktion: $\cos(-x) = \cos x$,
der Sinus eine ungerade (schiefsymmetrische) Funktion: $\sin(-x) = -\sin x$.
Weiters erhält man direkt aus der Definition::

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Als Summe (Differenz) stetiger Funktionen sind Cosinus und Sinus stetige Funktionen.

Trennt man in der Reihenentwicklung von

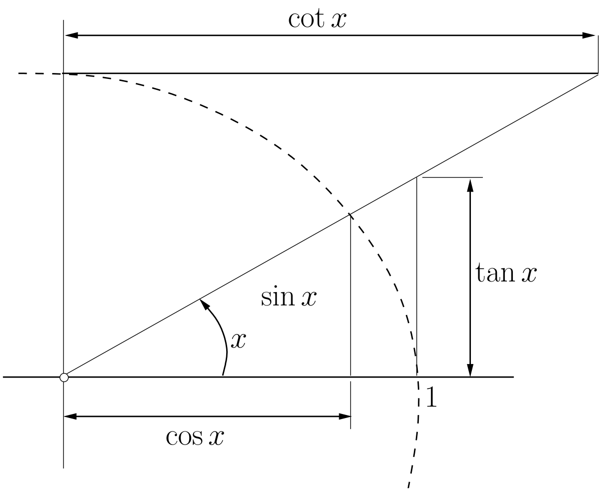
$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + ...$$

Real- und Imaginärteil, erhält man als Reihen für Cosinus und Sinus:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - + ... \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + ... \end{aligned}}$$

Es gibt eine reelle Zahl, genannt $\frac{\pi}{4}$ mit $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Daraus folgt $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und somit

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1.$$



Also sind e^{ix} und damit auch Sinus und Cosinus periodische Funktionen mit der Periode 2π.

Additionssätze:

Aus $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ folgt

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(x \pm y) & = & \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \sin(x \pm y) & = & \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \end{array}}$$

Setzt man $x = y$, so erhält man

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(2x) & = & \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) & = & 2 \sin x \cos x \end{array}}$$

Daraus erhält man

$$\begin{array}{rcl} 1 + \cos x & = & 2\cos^2 \dfrac{x}{2} \\ 1 - \cos x & = & 2\sin^2 \dfrac{x}{2} \end{array}$$

Da $e^{i(\pi+k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ reell ist, gilt

$$\sin k\pi = 0 \qquad \text{für alle k} \in \mathbb{Z}.$$

Aus $e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = i \cdot e^{ix}$ folgt

$$\begin{array}{rcl} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & = & \cos x \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & = & -\sin x \end{array}$$

Daher ist auch

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0 \qquad \text{für alle k} \in \mathbb{Z}.$$

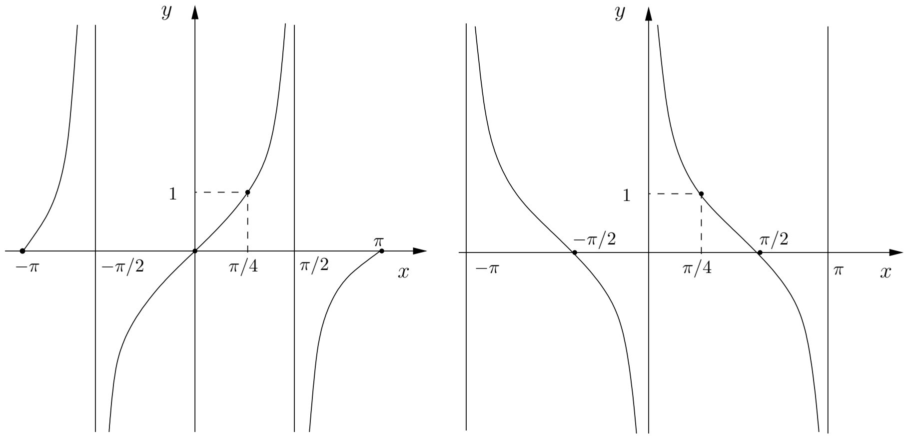


Abbildung 5.2: tan x bzw. cot x

Definition 5.4.

Tangens: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

Cotangens: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq 2k\pi)$

Der Tangens und Cotangens sind schiefsymmetrische Funktionen.

Es gilt:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Elegie um den Tangens

Aus verachteter Tiefe
quälst Du Dich aufwärts
in drückender Hitze
zum siebenten Himmel.

Doch was Du erspart hast,
das rauben bekanntlich
Inflationen und Kriege
alle π Jahre -
leicht läßt sich's beweisen.

Betrogener Tangens!
Bei soviel Tragik
bleibt mir die Spucke
weg und der Reim.

aus: H. Cremer: Carmina Mathematica, Verlag J.A. Mayer, Aachen

Predigt an den Cotangens

Bei Dir ist alles Mahnen,
o Cotangens vertan,
Du gleitest, hochgeboren,
hinab die schiefe Bahn.

Zwar bremst Du dazwischen Dein Sinken,
als packte Dich heilsame Reu,
doch kurz nur währt die Besinnung,
und hemmungslos fällst Du aufs neu.

Doch wenn Du bis minus Unendlich
gestürzt bist, Du haltloser Tor,
dann hebt Dich ein rettender Zauber
auf plus Unendlich empor.

Und wieder in lichten Höhen
erscheinst Du wunderbar,
doch gleicht Dein n-tes Leben
dem $(n-1)$-ten aufs Haar.

Du lernst nichts aus der Geschichte,
Du läufst im alten Trab, unendlich oft wirst Du gehoben,
unendlich oft stürzt Du hinab.

aus: H. Cremer: Carmina Mathematica, Verlag J.A. Mayer, Aachen

Die *Umkehrfunktionen* der trigonometrischen Funktionen lauten:

Arcus cosinus: $\arccos x \ : \ [-1,1] \to [0,\pi]$

Arcus sinus: $\arcsin x \ : \ [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

Arcus tangens: $\arctan x \ : \ R \to [-\pi/2, \pi/2]$

Arcus cotangens: $\operatorname{arccot} x \ : \ R \to [0,\pi]$

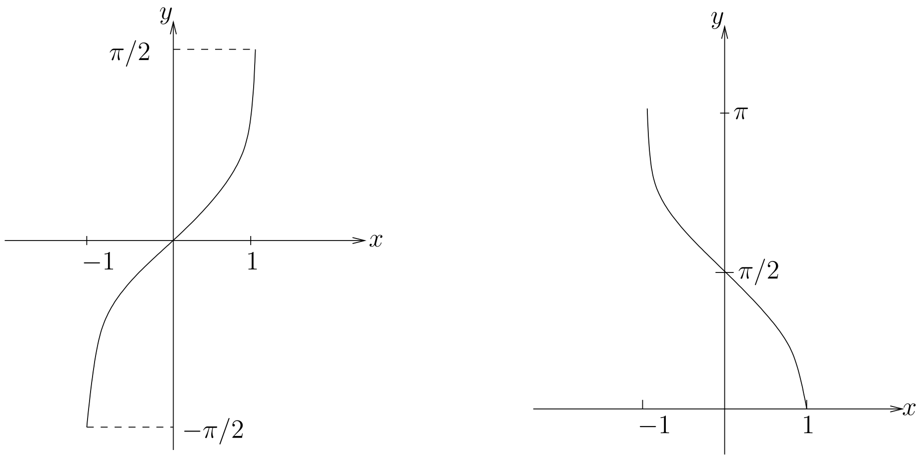
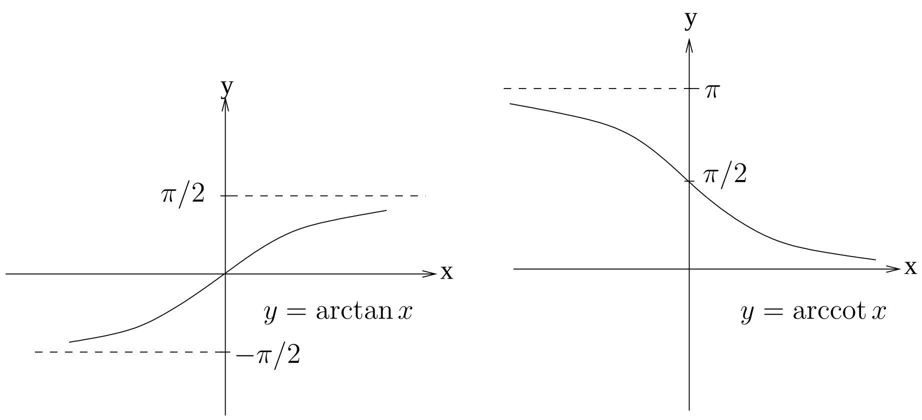


Abbildung 5.3: Hauptast der Arcsin-Funktion, Hauptast der Arccos-Funktion



Ode an die Arcustangensschlange

Du schleichst seit unendlichen Zeiten
so leis und so sanft heran,
Du stiegst in Ewigkeiten
kaum um ein δ an.
Nur langsam beginnst Du zu wachsen,
wie zum Beweis Deines Seins,
erreichst beim Schnittpunkt der Achsen Deine höchste Steigung, die Eins.

Dann duckst Du Dich wieder zierlich
in stiller Bescheidenheit
und wandelst weiter manierlich
in die Unendlichkeit.

Hier stock ich im Lobgesange,
mir schwant, er wird mir vermiest:

Oh, Arcustangensschlange,
beißt Du nicht doch, Du Biest?!

aus: H. Cremer: Carmina Mathematica, Verlag J.A. Mayer, Aachen

Kapitel 6

Differentialrechnung 1

Begründer:

(a) Sir Isaac Newton (1642 - 1727)

(b) Gottfried Wilhelm Leibniz (1648 - 1716)

6.1 Die Ableitung einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$

Im folgenden sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0, x_1 \in I$

Definition 6.1.
Der *Differenzenquotient* der Funktion f in den Punkten x_0, x_1 ist definiert als

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Definition 6.2.
Die Funktion f heißt in einem inneren Punkt x_0 des Intervalles I *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Grenzwert wird als $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$ bezeichnet.

Ist x_0 ein Randpunkt des Intervalls I, so kann man in x_0 *einseitige Ableitungen* betrachten:

Definition 6.3.
Die *linksseitige Ableitung* in x_0 ist definiert als

$$f'(x_0-) := \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Die *rechtsseitige Ableitung* in x_0 ist definiert als

$$f'(x_0+) := \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Beispiel.
Die Funktion $f(x) = |x|$ besitzt in $x_0 = 0$ die linksseitge Ableitung $f'(0-) = -1$ und die rechtsseitige Ableitung $f'(0+) = +1$.

Definition 6.4.
f ist in x_0 genau dann *differenzierbar*, wenn in x_0 die linksseitige und die rechtsseitge Ableitung existieren und gleich sind.

Satz 6.1.
$f : I \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $r(x)$ mit $r(x_0) = 0$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$$

Satz 6.1 besagt, dass sich $f(x)$ durch ein lineares Polynom $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ approximieren läßt.

Folgerung.
f ist in x_0 differenzierbar $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0.

Achtung: Eine stetige Funktion muß nicht differenzierbar sein (z.Bsp.: $f(x) = |x|$ für $x_0 = 0$).

Ist $f(x)$ in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar, so kann man eine neue Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ definieren, die jedem $x \in I$ die reelle Zahl $f'(x)$ zuordnet.

Definition 6.5.
Die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ heißt *(erste) Ableitung von f*. Ist f' stetig, so heißt f *stetig differenzierbar* auf I.

Rechenregeln für die Ableitung:

(1) $(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$

(2) $(f+g)' = f' + g'$

(3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

(4) $(\frac{f}{g})' = \frac{1}{g^2}(f'g - fg')$

(5) $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$ (Kettenregel)

(1) und (2) besagen, dass das Bilden der Ableitung eine lineare Operation ist. Dies gibt Anlass zur Definition eines neuen linearen Raumes!

Satz 6.2.
Ist f streng monoton und differenzierbar auf dem Intervall I, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ in allen Punkten $y \in f(I)$ mit $f'(f^{-1}) \neq 0$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Achtung: Nicht jede differenzierbare Funktion ist stetig differenzierbar.

Beispiel.
$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in I differenzierbar, aber $f'(x)$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.

Es gibt Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

Beispiel.
Wir konstruieren eine überall stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion $f(x)$ auf folgende Weise. Zunächst definiert man

$\varphi_0(x) := \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ und $f_0(x)$ sei die periodische Fortsetzung von $\varphi_0(x)$
$\varphi_1(x) := \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -x & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ und $f_1(x)$ sei die periodische Fortsetzung von $\varphi_1(x)$
$\vdots$
Dann ist
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber nirgends differenzierbar.

Ableitungen spezieller Funktionen:

(1) $f(x) = c$ (konstant) $\Rightarrow f'(x) = 0$

(2) $(x^k)' = kx^{k-1}$ für alle x, falls $k \in \mathbb{N}$ bzw. für $x \neq 0$, falls $k = -1, -2, \dots$

(3) $(e^x)' = e^x, \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

(4) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$

(5) $(\sinh x)' = \cosh x$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$
$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$(\coth x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$$

(6) $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ für } x > 1$$
$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| > 1$$
$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| < 1$$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

(8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $|x| < 1$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } |x| < 1$$
$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$
$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

6.2 Höhere Ableitungen; lokale Extrema

Definition 6.6.
Ist die erste Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ wieder eine differenzierbare Funktion, so nennt man ihre Ableitung die *zweite Ableitung*:

$$f''(x) := (f'(x))'$$

Allgemein definiert man als *k-te Ableitung*:

$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)}(x))'$$

Ist die k-te Ableitung eine stetige Funktion, so nennt man f eine *k-mal stetig differenzierbare Funktion.*

Definition 6.7.

$\mathcal{C}^0 \ldots$ Klasse der stetigen Funktionen

$\mathcal{C}^k \ldots$ Klasse der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$\mathcal{C}^\infty \ldots$ Klasse der beliebig oft differenzierbaren Funktionen

Beispiele.

- $\sin x \in \mathcal{C}^\infty$, da:
  $(\sin x)' = \cos x$
  $(\sin x)'' = -\sin x$
  $(\sin x)''' = -\cos x$
  $(\sin x)^{(4)} = \sin x$
  $\ldots$
- Jedes Polynom liegt in $\mathcal{C}^\infty$.

Definition 6.8. (Lokale Extrema)
Ist x_0 ein innerer Punkt des Intervalls I, so besitzt $f : I \to \mathbb{R}$ ein *lokales Minimum* in x_0, wenn gilt:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U(x_0)$$

f besitzt in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U(x_0)$$

Lokale Minima und lokale Maxima fasst man als *lokale Extrema* zusammen. Demgegenüber werden globale Minima und globale Maxima auch *globale Extrema* genannt.
x_0 heißt *globales Minimum* von f, wenn gilt:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I$$

x_0 heißt *globales Maximum* von f, wenn gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$$

Satz 6.3.
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (a,b) und hat f ein lokales Extremum in $x_0 \in (a,b)$, so ist $f'(x_0) = 0$.

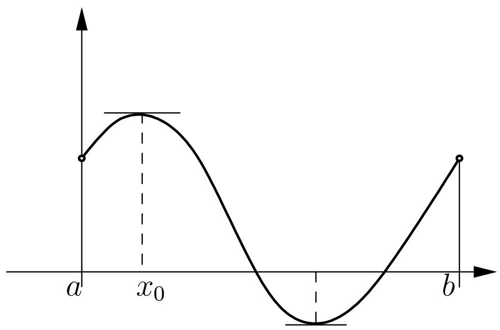
Definition 6.9.
Punkte x_0 mit $f'(x_0) = 0$ nennt man *stationäre Punkte.*

Achtung: Ein stationärer Punkt muß kein lokales Extremum sein! (z.Bsp.: $x_0 = 0$ für $f(x) = x^3$)

Um das globale Extremum von $f(x)$ zu finden, müssen die Funktionswerte in den stationären Punkten nicht nur untereinander, sondern auch mit $f(a)$ und $f(b)$ verglichen werden, denn das globale Extremum kann auch am Rand angenommen werden.

6.3 Mittelwertsätze; unbestimmte Formen

Satz 6.4. (Mittelwertsatz von Rolle)
Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in (a,b) differenzierbar. Weiters gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



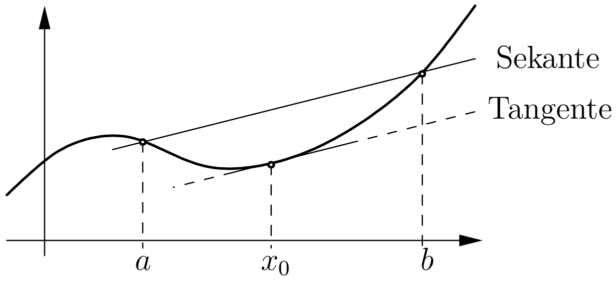
Satz 6.5. (Cauchy'scher Mittelwertsatz, 2.Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Die Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und im offenen Intervall (a,b) differenzierbar. Weiters gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $x_0 \in (a,b)$, so dass gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Setzt man $g(x) := x$, so erhält man:

Satz 6.6. (1.Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$, so dass gilt:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Insbesondere gilt für $h \neq 0$:

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + hf'(x+\delta h) \text{ mit } 0 < \delta < 1} \tag{6.1}$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen:

Satz 6.7.
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f eine konstante Funktion.

Aus (6.1) folgt:

Satz 6.8.
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Gilt für alle $x \in (a, b)$:

- $f'(x) \geq 0$, dann ist $f(x)$ monoton wachsend
- $f'(x) > 0$, dann ist $f(x)$ streng monoton wachsend
- $f'(x) \leq 0$, dann ist $f(x)$ monoton fallend
- $f'(x) < 0$, dann ist $f(x)$ streng monoton fallend

Unbestimmte Formen: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty$

Durch Anwendung des Cauchy'schen Mittelwertsatzes kann man in vielen Fällen den Grenzwert bestimmen:

Satz 6.9. (Regel von de l'Hospital)
Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall (a, b) differenzierbar ($b = \infty$ ist zugelassen!). Weiters seien $g(x)$ und $g'(x)$ auf (a, b) stets $\neq 0$ und es gelte

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \begin{cases} 0 & \text{(Fall I)} \\ \infty & \text{(Fall II)} \end{cases}$$

Existiert der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert

$$\lambda := \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

dann gilt auch

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Beispiele.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\ln(1+x)}$ ist eine unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Ein Mal differenziert erhält man erneut eine unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, nämlich $\frac{e^x-e^{-x}}{1-\frac{1}{1+x}}$. Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{(1+x)^2}} = 2.$$

Also ist der gesuchte Grenzwert 2.

Umformungsregeln für restlichen unbestimmten Formen:

- Beim Typ $0 \cdot \infty$ führt man eine der beiden folgenden Umformungen durch:

$$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{oder} \quad \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

- Umformung für Typ $0^0, 1^\infty$ und ∞^0:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x))\cdot g(x)}$$

$\Rightarrow$ Der Exponent ist nun eine unbestimmte Form vom Typ $0 \cdot \infty$.

- Umformung für Typ $\infty - \infty$:

$$f(x) - g(x) = f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

Hat die unbestimmte Form $\frac{g(x)}{f(x)}$ einen Grenzwert $\neq 1$, so ist das Problem gelöst. Anderenfalls erhält man eine neue unbestimmte Form vom Typ $0 \cdot \infty$, die wie oben umgeformt wird.

Historische Bemerkung:

Die Regel von De l'Hopital stammt eigentlich vom Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli (1667-1748). Marquis de l'Hopital war ein interessierter Laie, der diese Regel dem jungen Johann Bernoulli, der im Schatten seines angeseheneren Bruders Jacob Bernoulli - einem ebenfalls bedeutenden Mathematikers - stand gegen eine ansehnliche Summe abkaufte. In späteren Jahren, nach dem Tod von Marquis de l'Hopital bemühte sich Johann Bernoulli, seine Urheberschaft an diesem Resultat klarzustellen.

Abbildung 6.1: Johann Bernoulli

6.4 Konvexität, Ungleichungen

Gegeben sei ein Intervall I und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.

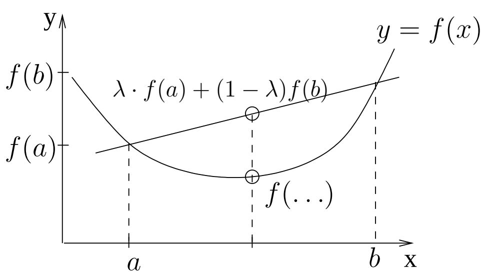
Definition 6.10.
f heißt *konvex*, wenn $\forall\, a, b \in I, a < b$ und $\forall\, 0 \le \lambda \le 1$ gilt:

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

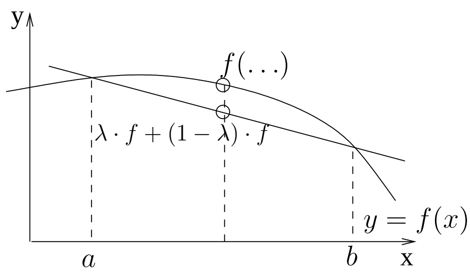
streng konvex: $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

konkav: $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \ge \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

streng konkav: $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$



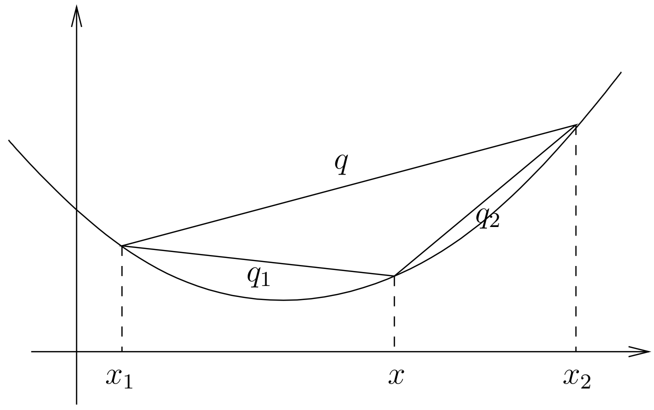
(streng) konvexe Funktion



(streng) konkave Funktion

Lemma 6.10.
Ist f streng konvex auf I und $x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$, dann gilt:

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}}_{q_1} < \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{q} < \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}}_{q_2}$$

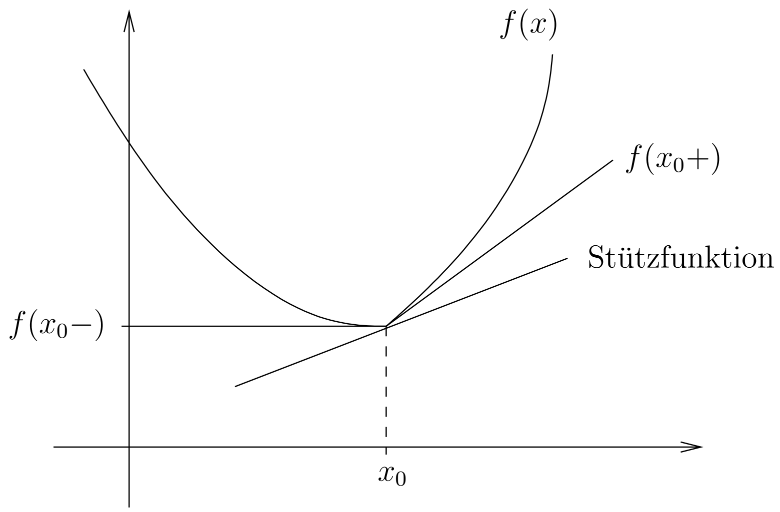


Lemma 6.11.
Ist f streng konvex auf I und $x_0 \in I$ ein fester Punkt, dann ist $q(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ auf I streng monoton wachsend.

Satz 6.12.
Ist I ein <u>offenes</u> Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng konvex, dann ist f stetig auf I. Ferner besitzt $f(x)$ in jedem Punkt $x_0 \in I$ eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung $f'(x_0-), f'(x_0+)$ mit $f'(x_0-) \leq f'(x_0+)$. Für jedes $m \in [f'(x_0-), f'(x_0+)]$ gilt:

$$f(x) > f(x_0) + m(x - x_0) \quad \ldots \textit{Subgradienten Ungleichung}$$

Definition 6.11.
Die lineare Funktion $f(x_0) + m(x - x_0)$ heißt *Stützfunktion* von f in x_0, m ist ein *Subgradient* von f im Punkt x_0.



Achtung: Eine auf einem abgeschlossenen Intervall definierte konvexe Funktion muß nicht stetig sein!

Satz 6.13.
I sei ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I \\ f \text{ ist konkav} \quad &\Leftrightarrow \quad f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in I \end{aligned}$$

Folgerung.
Wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so geht f zum Beispiel vom konvexen zum konkaven Verhalten über: x_0 ist ein *Wendepunkt*.

Ungleichungen

Satz 6.14. (Allgemeine Bernoulli'sche Ungleichung)
Für alle $x > -1, x \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &> 1 + \alpha x \quad \text{für } \alpha < 0 \text{ oder } \alpha > 1 \\ (1+x)^\alpha &< 1 + \alpha x \quad \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

Definition 6.12.
$x_1, \ldots, x_n$ seien n Punkte in einem reellen Vektorraum. Ein Punkt x heißt *Konvexkombination* der Punkte $x_1, \ldots, x_n$, wenn es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ gibt mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, so dass gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Satz 6.15.
Ist f konvex auf dem Intervall I und sind $x_1, \ldots, x_n \in I$, so gilt für jede Konvexkombination $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Als Verallgemeinerung der euklidischen Norm definiert man:

Definition 6.13.
Die *p-Norm* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als:

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

Dann gilt:

Satz 6.16. (Minkowski'sche Ungleichung)

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Satz 6.17. (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad \text{mit } x_1, \ldots, x_n > 0$$

Satz 6.18. (Hölder'sche Ungleichung)

Es sei $p > 1,\ q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

kurz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

6.5 Taylorformel

Satz 6.19.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in (a,b) $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gilt für x_0 und $x_0+h \in (a,b)$:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta h) \qquad \text{mit } 0 < \delta < 1$$

Abbildung 6.2: Brook Taylor (1685 - 1731)

Definition 6.14.
$R_n := \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta h)$ bezeichnet man als das *Lagrange'sche Restglied.*

Die Taylorformel beschreibt die Funktion $f(x)$ durch ihre Ableitungen in *einem* Punkt. Man kann sie zu Extremwertuntersuchungen oder zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten heranziehen.

Aus Satz 6.19 erhält man:

Folgerung.
Ist die $(n+1)$-te Ableitung in (a,b) identisch 0, dann ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n-ten Grades.

Speziell für $x_0 := 0$ und $h := x$ erhält man:

Mac Laurin'sche Formel:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\delta x)$$

Entwickelt man die Funktion $f(x)$ um den Punkt x_0 und setzt man $h = x - x_0$, so erhält man:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x - x_0)) \qquad \text{mit } 0 < \delta < 1.$$

Qualitative Fassung der Taylorformel:
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) n-mal differenzierbar, dann gibt es eine in x_0 stetige Funktion $r(x)$ mit $r(x_0) = 0$, so dass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n r(x)$$

Definition 6.15. (Landau'sche O-Symbole)

- $f(x) = o(g(x))$, wenn $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = g(x) + o(h(x))$, wenn $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0$
- $f(x) = O(g(x))$, wenn es eine Konstante C gibt, so dass für alle $x \in U(x_0),\ x \neq x_0$, gilt:

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

Damit gilt:

Satz 6.20.
Ist f n-mal differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$, so gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o(|x-x_0|^n) \\ \text{und} & \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + O(|x-x_0|^n) \end{aligned}$$

Satz 6.21. (Extremwertbestimmung)

Ist $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$, so gilt:

1. Ist n gerade, so hat f in x_0 ein lokales Extremum. $f(x)$ hat in x_0 ein Minimum, wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist, und ein Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist.
2. Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 einen Wendepunkt (Flachpunkt, falls $n \geq 3$ ist).

Ist f beliebig oft differenzierbar, dann können in der Taylorformel beliebig hohe Ableitungen auftreten.

Definition 6.16.
Die *Taylorreihe* von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 ist definiert als:

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

Im Zusammenhang mit Taylorreihen stellen sich folgende Fragen:

- Für welche Werte von x konvergiert die Taylorreihe? (sicher für $x = x_0$)
- Wann gilt $f(x) = T_{f,x_0}(x)$? (etwa bei $f(x) = e^x, \sin x, \ldots$)

Beispiel für eine Funktion $f(x)$, deren Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ überall konvergiert, aber verschieden von $f(x)$ ist:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Satz 6.22.
Ist f auf einem Intervall (a,b) beliebig oft differenzierbar und ist $x_0 \in (a,b)$, dann konvergiert die Taylorreihe $T_{f,x_0}(x)$ für alle jene $x \in (a,b)$ gegen $f(x)$, für die das Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \delta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^{n+1}$$

mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt:

$$f(x) = T_{f,x_0}(x).$$

Dies ist sicher der Fall, wenn es Konstanten A, B gibt, so dass für alle $x \in (a,b)$ und alle $n = 1, 2, ...$ gilt:

$$|f^{(n)}(x)| \leq AB^n.$$

Kapitel 7

Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Im Folgenden sei X eine beliebige Menge, (Y, d') ein metrischer Raum und $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge von Funktionen.

Definition 7.1.
Eine Folge (f_n) von Funktionen heißt *punktweise konvergent* gegen eine Grenzfunktione f, wenn für jedes $x \in X$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Beispiel.
Die Folge der Funktionen $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, konvergiert auf $[0, 1]$ gegen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Beispiel.
Die Folge $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, konvergiert auf $\mathbb{R}$ gegen $f(x) \equiv 0$. Die Folge der ersten Ableitungen $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$, ist aber auf $\mathbb{R}$ <u>nicht</u> punktweise konvergent, da sie für $x = 0$ nicht konvergiert.

Beispiel.
Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Die Funktionen konvergieren gegen $f(x) \equiv 0$. Für die Folge der ersten Ableitungen gilt aber:

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} \quad \to \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \neq 0 \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$g(x)$ ist also nicht die Ableitung der Grenzfunktion $f(x)$.

Fragen:

- Wann konvergiert eine Folge stetiger Funktionen gegen eine stetige Grenzfunktion?
- Wann konvergiert die Folge der ersten Ableitungen gegen die Ableitung der Grenzfunktion?

Definition 7.2.
Eine Funktionenfolge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Grenzfunktion $f : X \to Y$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)\, \forall\, n \geq n_0\, \forall\, x \in X: \ d'(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

Anmerkung.
Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz.

Satz 7.1.
Es sei (Y, d') ein vollständiger metrischer Raum. (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)\, \forall\, m, n \geq n_0\, \forall\, x \in X: \ d'(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

Satz 7.2.
Sind die Funktionen $f_n : X \to Y$ stetig und ist die Folge (f_n) gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion $f : X \to Y$, dann ist f stetig.

Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, (Y, d') ein beliebiger metrischer Raum.
$\mathcal{C}(X, Y) \ldots$ Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y.
Durch

$$d''(f, g) := \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x))$$

ist auf $\mathcal{C}(X, Y)$ eine Metrik definiert.

Satz 7.3.
Die Folge (f_n) konvergiert in $\mathcal{C}(X, Y)$ genau dann bezüglich der Metrik d'', wenn die Funktionenfolge (f_n), $f_n : X \to Y)$, gleichmäßig konvergiert.

Satz 7.4.
Ist (X, d) kompakt und (Y, d') vollständig, dann ist auch $\mathcal{C}(X, Y)$ vollständig.

Definition 7.3. (Gleichmäßige Konvergenz von Reihen)
Sei $f_n : X \to Y, n = 1, 2, \ldots$. Die Reihe $s(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf X, wenn die Folge der Partialsummen von $s(x)$ gleichmäßig konvergiert.

Satz 7.5. (Weierstraß'sches Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen)
Sind $f_n : X \to Y$ Abbildungen einer Menge X in einen Banachraum Y, und gibt es für jedes $n \geq n_0$ ein c_n mit

$$\|f_n(x)\| \leq c_n \quad \forall x \in X$$

wobei $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} c_k$ konvergiert, dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (absolut und) gleichmäßig konvergent.

Beispiel.
Es sei $0 < q < 1$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert gleichmäßig auf $[-q, q]$, denn $c_n := q^n$ ist eine Majorante für $|x|^n$. Somit ist $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $[-q, q]$ eine stetige Funktion, und zwar $\frac{1}{1-x}$. Damit erhält man auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ die Reihendarstellung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Im folgenden betrachten wir Folgen von Funktionen, die bis auf endlich viele Punkte differenzierbar sind. Ein Beispiel hierfür sind stückweise lineare Funktionen. Ihre Ableitung sind Treppenfunktionen, die in den endlich vielen Knickstellen der stückweise linearen Funktion Sprünge aufweisen. Diese Funktionen werden bei der Einführung des Integrals eine besonders wichtige Rolle spielen.

Lemma 7.6.
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar bis auf endlich viele Punkte $x_i \in D \subset [a, b]$ und gilt für alle $x \in [a, b] \setminus D : |f'(x)| \leq M$ für ein $M > 0$, dann ist

$$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot (b - a)$$

Satz 7.7. (Gleichmäßige Konvergenz differenzierbarer Funktionen)
Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. (D_n), $n = 1, 2, \ldots$, sei eine Folge endlicher Teilmengen von I und $D := \bigcup\limits_{1 \leq n < \infty} D_n$. f_n sei eine auf I stetige Funktion, die bis auf $x \in D_n$ differenzierbar ist. Es gebe ein $x_0 \in I$, so dass $(f_n(x_0))$ konvergiert. Ferner sei $g_n : I \to \mathbb{R}$ eine auf I gleichmäßig konvergente Folge mit

$$g_n(x) = f_n'(x) \text{ für } x \notin D_n$$

Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(x)$ und es gilt

$$f'(x) = g(x) \quad \forall\, x \in I \setminus D$$

wobei $g(x)$ die Grenzfunktion der $g_n(x)$ ist.

Beispiel.
Betrachten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots .$$

Für $x = 0$ konvergiert die Reihe gegen 0. Wird die Reihe gliedweise differenziert, so erhält man

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots$$

Diese ist als geometrische Reihe im Intervall $[-q, q]$, $0 < q < 1$, gleichmäßig konvergent und besitzt als Grenzfunktion $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Gliedweise Differentiation entspricht dem Bilden von $s_n'(x)$. Die Folge der differenzierten Partialsummen ist also gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion $g(x)$. Nach Satz 7.7 ist somit die Ausgangsreihe gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f(x)$ und es gilt $f'(x) = g(x)$. Andererseits ist $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = g(x)$. Daher können sich $f(x)$ und Arcus-Tangens von x nur durch eine Konstante C unterscheiden. Setzt man $x = 0$, so erhält man $C = 0$. Damit erhält man die
$\Rightarrow$ *Arcus-Tangens Reihe:* $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots \quad$ für $|x| < 1$

Beispiel.
Ein analoges Vorgehen liefert für die Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots,$$

die für $x_0 = 0$ konvergiert, die Logarithmus Reihe. Gliedweises Differenzieren führt auf $1 - x + x^2 - + \ldots = \frac{1}{1+x}$.
Logarithmus Reihe: $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$

Kapitel 8

Potenzreihen

Definition 8.1.
Unendliche Reihen der Form
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_n \in \mathbb{R})$$
bzw.
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$$
nennt man *reelle (komplexe) Potenzreihen.*

In diesem Abschnitt sollen folgende Fragen behandelt werden:

1. In welchem Bereich konvergiert eine Potenzreihe?
2. Wann ist eine Potenzreihe gliedweise differenzierbar?
3. Welches Verhalten zeigt eine Potenzreihe am Rand des Konvergenzbereiches?

Ferner sollen einige spezielle Potenzreihen, wie etwa die Binomialreihe, besprochen werden.

Satz 8.1. (Formel von Hadamard)
Gegeben sei die reelle oder komplexe Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und es sei
$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (\rho = 0 \text{ und } \rho = \infty \text{ sind zugelassen})$$
Dann gilt:

1. Die Reihe divergiert für alle z mit $|z| > \rho$.
2. Die Reihe konvergiert absolut für alle z mit $|z| < \rho$.
3. Sie konvergiert gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe mit einem Radius $r < \rho$.

Abbildung 8.1: Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963)

Definition 8.2.
ρ heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Satz 8.2.
Existiert $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq \infty$, so ist $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Am Rand des Konvergenzbereiches kann die Potenzreihe ein ganz unterschiedliches Verhalten zeigen:

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ divergiert für $x = \pm 1$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$ divergiert für $x = 1$ und konvergiert für $x = -1$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}x^n$ konvergiert für $x = \pm 1$

Satz 8.3.
Im Inneren des Konvergenzkreises stellen Potenzreihen stetige Funktionen $f(x)$ dar, die differenzierbar sind:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Satz 8.4.
Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist in $(-\rho, \rho)$ beliebig oft differenzierbar. Für ihre Koeffizienten gilt

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

d.h. die Reihe ist die Taylorreihe von $f(x)$.

Binomialreihe: $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$

allgemeiner Binomialkoeffizient: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$

Satz 8.5. (Identitätssatz für Potenzreihen)
Haben die beiden reellen oder komplexen Potenzreihen $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ den gleichen positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und gibt es eine Nullfolge (x_k) mit $0 < |x_k| < \rho$, so dass

$$f(x_k) = g(x_k) \quad \text{mit } k = 1, 2, \ldots$$

gilt, dann stimmen die Koeffizienten beider Potenzreihen für alle n überein:

$$a_n = b_n \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

d.h. $f(x) = g(x)$.

Korollar. (Prinzip der isolierten Nullstellen)
Ist $f(x) \neq 0$ eine Potenzreihe mit $\rho \neq 0$, dann können sich die Nullstellen von $f(x)$ in keinem Punkt häufen.

Satz 8.6. (Abel'scher Grenzwertsatz)
Hat die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius 1 und ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergert, so gilt

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

d.h. die Funktion $f(x)$ läßt sich aus dem Inneren stetig auf den Rand des Konvergenzgebietes fortsetzen.

Beispiele.
$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$ (alternierende harmonische Reihe)

$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$

Satz 8.7.
Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ sei für $|x| < \rho_1$ konvergent, die Reihe $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ sei

für $|y| < \rho_2$ konvergent und es gelte $|a_0| < \rho_2$. Dann ist die Funktion $F(x) = g(f(x))$ in einer Umgebung von 0 definiert und wieder in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ mit}$$

$$c_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_{nk} \text{ und}$$

$$a_{nk} := \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_n \geq 0 \\ l_1+\ldots+l_n=k}} a_{l_1} \cdot a_{l_2} \cdot \ldots \cdot a_{l_n}$$

Ist $a_0 = 0$, so sind die Koeffizienten durch endliche Summen anstelle unendlicher Reihen darstellbar.

Beispiel.
$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$

$g(y) = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$

Daraus folgt

$F(x) = g(f(x)) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{3}{40}x^5 ...$

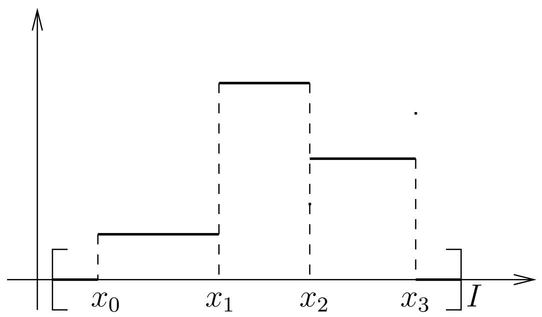
Kapitel 9

Das bestimmte und das unbestimmte Integral

9.1 Reguläre Funktionen

Im Folgenden ist I immer ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$. Es sei weiters $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$ mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Definition 9.1.
$f : I \to \mathbb{R}$ heißt *integrable Treppenfunktion*, wenn f auf jedem offenen Intervall (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n-1$, konstant ist und wenn $f(x) = 0$ für $x < x_0$ bzw. $x > x_n$ gilt.



Anmerkung.
Sind f und g integrable Treppenfunktionen, dann sind αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f + g$, fg, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ ebenfalls integrable Treppenfunktionen.

Definition 9.2.
$f : I \to \mathbb{R}$ heißt *reguläre Funktion*, wenn es eine Folge integrabler Treppenfunktionen gibt, die auf jeder kompakten Teilmenge K von I gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Menge aller auf I regulären Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{R}(I)$.

Satz 9.1.
Ist $f,\ g \in \mathscr{R}(I)$, dann sind auch $\alpha f\ \ (\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, fg, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ reguläre Funktionen.
Insbesondere ist $\mathscr{R}(I)$ ein linearer Raum, der durch die Supremumsnorm zu einem normierten Vektorraum wird.

Satz 9.2.
Ist K kompakt, dann ist $\mathscr{R}(K)$ ein Banachraum.

Satz 9.3.
Jede stetige Funktion ist regulär.

Anmerkung.
Also gilt für jede kompakte Menge K:

$$\mathcal{C}(K) \subset \mathscr{R}(K)$$

Satz 9.4.
Jede monotone Funktion ist regulär.

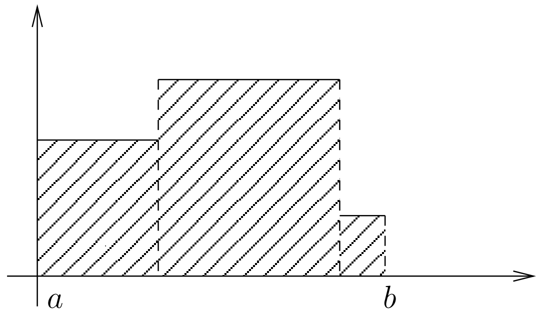
Achtung: Ist $f,\ g \in \mathscr{R}(K)\ \not\Rightarrow\ f \circ g \in \mathscr{R}(K)$

9.2 Das bestimmte Integral

Definition 9.3.
Sei $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $f : K \to \mathbb{R}$ integrable Treppenfunktion. Dann ist das *Integral der Treppenfunktion* $f(x)$ definiert als

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) \quad \text{mit } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Anmerkung.
Ist $f(x) \geq 0$, so ist $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ die Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen von f eingeschlossen wird.



Definition 9.4.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}$$
$$f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}$$

Somit gilt

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Anmerkung.
Ist f eine integrable Treppenfunktion, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

Satz 9.5. (Eigenschaften bestimmter Integrale)
Seien $K = [a, b]$ und f, g integrable Treppenfunktionen auf K. Dann gilt:

(1) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

(3) $\displaystyle f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

(4) $\displaystyle f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(5) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sup_{x \in K} |f(x)| \cdot (b - a) = \|f\|_K \cdot (b - a)$

Satz 9.6.
Ist $f \in \mathscr{R}([a,b])$ und sind (s_n) und (t_n) Folgen integrabler Treppenfunktionen, die gegen f konvergieren, dann existieren $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)dx$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)dx$$

Definition 9.5. (Integral einer regulären Funktion)
Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$, $(t_n) \to f$ eine Folge konvergenter Treppenfunktionen. Dann ist das Integral von f definiert als

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)dx$$

Infolge des Satzes 9.6 ist das Integral von f eindeutig definiert. Für das Integral regulärer Funktionen gelten wieder alle fünf Eigenschaften aus Satz 9.5.
Zusätzlich gilt:

Satz 9.7.
Konvergiert die Folge (f_n) regulärer Funktionen gegen f, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ ordnet jeder Funktion $f \in \mathscr{R}(K)$ eine reelle Zahl zu, kann daher als Abbildung $T : \mathscr{R}(K) \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden. Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f)+T(g) \\ T(\alpha f) &= \alpha T(f) \end{aligned}$$

Also ist T eine *lineare* Abbildung des Banachraumes $\mathscr{R}(K)$ in $\mathbb{R}$. Man spricht dann von einem *linearen Funktional.*

Satz 9.8.
Die Abbildung $T : \mathscr{R}(K) \to \mathbb{R}$, die einer Funktion $f \in \mathscr{R}(K)$ die reelle Zahl $\int_a^b f(x)dx$ zuordnet, ist ein lineares Funktional.

Satz 9.9. (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für Integrale)
Sind f und g reguläre Funktionen auf $[a,b]$, so gilt

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Zusatzdefinitionen:

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx := 0$
- Für $a < b$ gilt: $\displaystyle\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$

Sind $f, g \in \mathscr{R}(K)$ und ist $g(x) \geq 0$, $\underline{M} := \inf_{x\in K} f(x)$, $\overline{M} := \sup_{x\in K} f(x)$, so erhält man aus

$$\underline{M}g(x) \leq f(x)g(x) \leq \overline{M}g(x)$$

infolge der Monotonie des Integrals

$$\underline{M}\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \overline{M}\int_a^b g(x)dx. \tag{9.1}$$

Daher gibt es ein M_0 mit

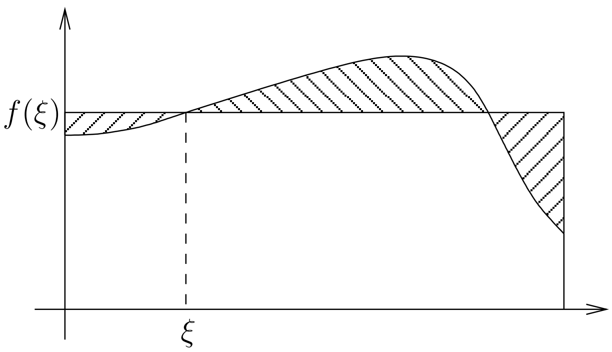
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = M_0 \int_a^b g(x)dx. \tag{9.2}$$

Satz 9.10. (Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Es sei $f \in \mathscr{R}(K)$. Dann gibt es ein M_0 mit $\inf\limits_{x\in K} f(x) \leq M_0 \leq \sup\limits_{x\in K} f(x)$, so dass gilt

$$\int_a^b f(x)dx = M_0(b-a)$$

Korollar.
Ist f stetig, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$



Definition 9.6.
Ist $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ eine beliebige Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ und ist $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, so nennt man

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

eine *Riemann'sche Summe.*

Satz 9.11.
Ist $f \in \mathscr{R}(I)$, $I = [a,b]$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $x_{i+1} - x_i \leq \delta$ und alle $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right| < \varepsilon$$

9.3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung; Stammfunktionen

Lemma 9.12.
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung des kompakten Intervalls $I = [a,b]$ und existiert $f'(x)$ mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I \setminus D$, wobei D eine abzählbare Menge ist, dann ist f auf I konstant.

Definition 9.7.
Gegeben sei eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Eine *stetige* Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f in I, wenn bis auf abzählbar viele Punkte gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Satz 9.13.

1. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f, dann ist auch $F(x) + c$ eine Stammfunktion mit $c \in \mathbb{R}$ konstant.
2. Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, dann ist $F_1(x) - F_2(x)$ konstant.

Satz 9.14.
Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ auf $I = [a,b]$, dann gilt

1. $F(x) + G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$
2. $\alpha F(x)$ ist eine Stammfunktion von $\alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(F \circ \varphi)(x)$ ist eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\varphi'$
4. $F(x)G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)G(x) + F(x)g(x)$

Funktion	**Ableitung**	**Stammfunktion**
e^x	e^x	e^x
$\ln x,\ x > 0$	$\frac{1}{x}$	$x(\ln x - 1)$
$\frac{1}{x},\ x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln \lvert x \rvert$
$a^x,\ a > 0$	$a^x \ln a$	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$

Satz 9.15. (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)
Ist $I = [a, b]$ und $f \in \mathscr{R}(I)$, dann besitzt f eine Stammfunktion $F(x)$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Aufgrund dieses Satzes ermöglichen Stammfunktionen eine einfache Auswertung von Integralen.

Definition 9.8.
Die Menge aller Stammfunktionen von $f \in \mathscr{R}(I)$ bezeichnet man als *unbestimmtes Integral* von $f(x)$.

Satz 9.16.
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ in jedem Punkt $x \in (a, b)$ differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Kapitel 10

Integrationsmethoden

10.1 Allgemeine Resultate

Satz 10.1. (Partielle Integration)
Ist $K = [a, b]$ und sind F, G die Stammfunktionen von $f(x)$ bzw. $g(x)$, so gilt

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Satz 10.2. (Substitutionsregel)
Ist $K = [a, b]$, f stetig in K und φ stetig differenzierbar in K, so gilt für $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dt \quad \text{mit } a = \varphi(\alpha) \text{ und } b = \varphi(\beta)$$

Satz 10.3. (2.Mittelwertsatz der Integralrechnung)
$K = [a, b]$, $f \in \mathscr{R}(K)$ und g sei stetig differenzierbar und *monoton* auf K. Dann gibt es ein $x^* \in K$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{x^*} f(x)dx + g(b)\int_{x^*}^b f(x)dx$$

Satz 10.4. (Integration unendlicher Reihen)
Es sei K ein kompaktes Intervall und für die Funktionen $f_n \in \mathscr{R}(K)$ für $n = 1, 2, \ldots$ gelte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ist gleichmäßig konvergent auf K. Ferner sei $F_n(x)$ die Stammfunktion von $f_n(x)$. Es gebe Konstante c_n und ein $x_0 \in K$, so dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(F_n(x_0) + c_n)$ konvergiert. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(F_n(x) + c_n)$ auf K gleichmäßig konvergent und Stammfunktion von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Satz 10.5. (Integration von Potenzreihen)
Jede reelle Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls gliedweise integrierbar. D.h. $\forall x \in (-\rho, \rho)$ gilt

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

10.2 Integration rationaler Funktionen

In der Partialbruchdarstellung rationaler Funktionen treten folgende Terme auf:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}, \ \frac{C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}, \ \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}.$$

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x| + C$

2. $\displaystyle\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ mit $k \geq 2$ führt auf $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{A}{x^2+\beta x+\gamma}dx = \frac{A}{\sqrt{q}} \arctan\frac{x+p}{\sqrt{q}} + C$ mit $p = \dfrac{\beta}{2}$ und $q = \gamma - \dfrac{\beta^2}{4}$

4. $\displaystyle\frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}$ wird aufgespalten in $\displaystyle D\frac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma} + E\frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}$.
   Der erste Term führt auf $D\ln|x^2+\beta x+\gamma|$, der zweite Term führt auf Fall 3.

5. $\displaystyle\frac{C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$ führt durch quadratische Ergänzung auf $const \cdot \dfrac{1}{(1+y^2)^k}$ mit $k \geq 2$.
   Ansatz:
   $$\int \frac{1}{(1+y^2)^k}dy = \int \frac{1+y^2}{(1+y^2)^k}dy - \int y \cdot \frac{y}{(1+y^2)^k}dy.$$
   Der erste Term führt auf ein Integral mit reduziertem Exponenten $k-1$, der zweite Term wird partiell integriert.

6. $\displaystyle\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$ mit $k \geq 2$ wird zerlegt in $\displaystyle\frac{B}{2} \cdot \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} + D \cdot \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$.
   Der erste Term läßt sich direkt integrieren, der 2. Term führt auf Fall 5.

Satz 10.6.
Die Stammfunktion einer rationalen Funktion läßt sich durch rationale Funktionen, Logarithmen und Arcustangens beschreiben.

10.3 Regeln zur Integration algebraischer und transzendenter Funktionen

$R(\ldots)$ und $R^*(\ldots)$ bezeichnen rationale Funktionen, $P(x)$ ist ein Polynom.

Regel 1: Ist $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$, so ist $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$

Regel 2: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

Regel 3: $\int R\left(x, \sqrt{ax+b}\right)dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right)\frac{2t}{a}dt = \int R^*(t)dt$

Regel 4: $\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{1}{t}dt = \int R^*(t)dt$

Regel 5: Zur Integration rationaler Ausdrücke von Winkelfunktionen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ verwendet man die Substitution

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Daher ist

$$\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int R^*(t)dt$$

Regel 6: $\sqrt{x^2+bx+c}$ führt man durch quadratische Ergänzung auf einen der folgenden drei Ausdrücke zurück

- $\sqrt{a^2-x^2}$ Substitution: $x = a\sin t$
- $\sqrt{x^2-a^2}$ Substitution: $x = a\cosh t$
- $\sqrt{x^2+a^2}$ Substitution: $x = a\sinh t$

Damit lassen sich alle Integrale der Form $\int R\left(x, \sqrt{x^2+bx+c}\right)dx$ lösen.

Regel 7: Ein Integral $\int \frac{P(x)}{\sqrt{x^2+bx+c}}dx$ mit grad $P(x) = n$ läßt sich durch folgenden Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ lösen:

$$\int \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{\sqrt{x^2+bx+c}}dx = (A_0x^{n-1} + A_1x^{n-2} + \ldots + A_{n-1})\sqrt{x^2+bx+c} + A_n\int\frac{1}{\sqrt{x^2+bx+c}}dx$$

Regel 8: $\int P(x)\sqrt{x^2+bx+c}dx = \int \frac{P(x)(x^2+bx+c)}{\sqrt{x^2+bx+c}}dx,$

$$\int P(x)\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}dx = \int \frac{P(x)(ax+b)}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}dx$$

Somit lassen sich die beiden Integrale durch den Ansatz in Regel 7 lösen.

Nicht in geschlossener Form darstellbar sind

Fehlerintegral: $\int_0^x e^{-t^2} dt$

Integralsinus: $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1}$

Integralcosinus: $\mathrm{Ci}(x) = C + \log x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt.$

Dabei ist C die Mascheroni'sche Konstante $C \approx 0,577\ldots$.

Fresnel Integrale: $\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi}{2} t^2) dt$ und $\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt$

Elliptische Integrale: $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$, wobei grad $P(x) \in \{3, 4\}$ ist.

Hyperelliptische Integrale: $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$, wobei grad $P(x) \geq 5$ ist.

Kapitel 11

Fourierreihen

Funktionen der Form

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

bezeichnet man als *trigonometrische Polynome*. Oft ist eine komplexe Schreibweise einfacher:

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{mit } e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_0, a_1, …, a_n; b_1, …, b_n und c_{-n}, …, c_n ist

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

beziehungsweise

$$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = i(c_k - c_{-k})\,.$$

Trigonometrische Reihen erhält man durch den Grenzübergang $n \to \infty$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

beziehungsweise

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

Trigonometrische Polynome eignen sich wesentlich besser zur Approximation periodischer Funktionen als Potenzreihen. Aber während jede Potenzreihe zumindest für $x = 0$ konvergiert, kann es sein, dass eine trigonometrische Reihe für kein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

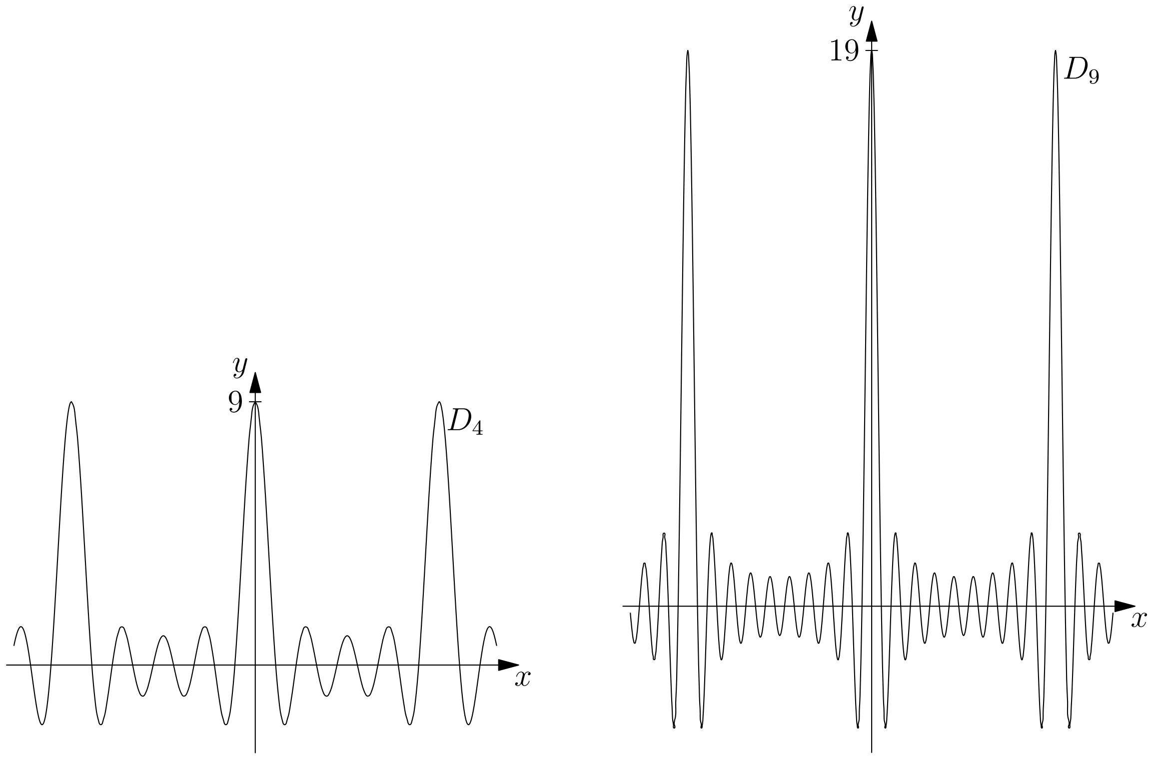


Abbildung 11.1: $y = D_4(x)$ und $y = D_9(x)$

Beispiel.
$D_n(x) = 1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx$. Es gilt:

$$D_n(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{für } x = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots \\ \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} & \text{für } x \neq 2k\pi \end{cases}$$

Daher existiert $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(x)$ für kein x.
Aus Abbildung 11.1 erkennt man, dass die trigonometrischen Polynome $\frac{1}{2n+1}D_n^2(x)$ gegen die „Funktion“

$$f(x) = \begin{cases} \infty & x = 2k\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

streben.

Beispiel. (Periodische Sägezahnfunktion)

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} 0 & x = 0, 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion $s(x)$ ist punktweise konvergent für alle x, gleichmäßig konvergent im Intervall $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ und erfüllt für alle x die *Mittelwert-Eigenschaft*

$$s(x) = \frac{1}{2}(s(x-) + s(x+)).$$

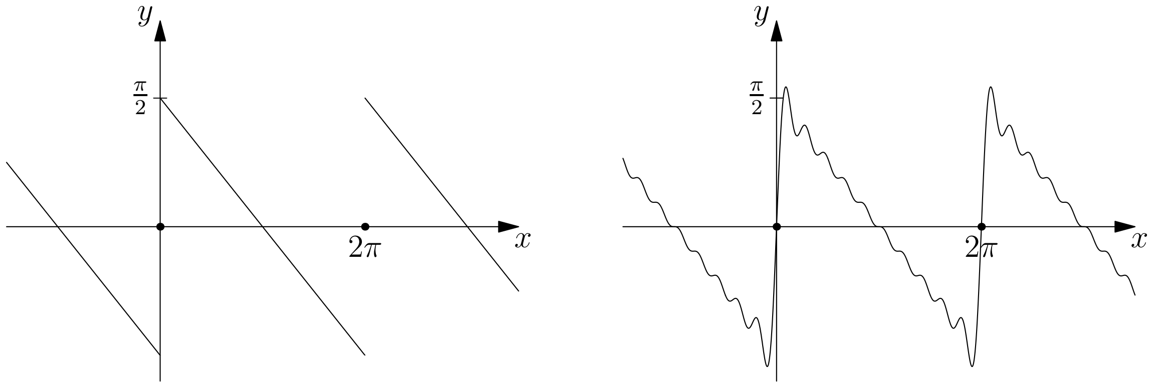


Abbildung 11.2: Der Sägezahn $y = s(x)$ und seine 10-te Partialsumme

Durch gliedweise Integration erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{4} + \ldots = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

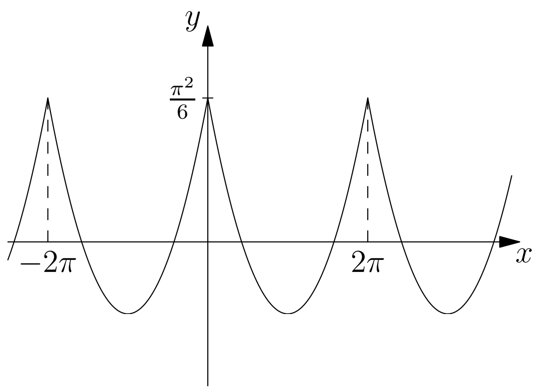


Abbildung 11.3: $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

Setzt man $x = 0$, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Für $x = \pi$ erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$$

Nochmalige Integration liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{1}{12} x(x-\pi)(x-2\pi)$$

Die auf $(0, 2\pi)$ definierten Polynome

$$s(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)\,, \quad \frac{1}{4}(x-\pi)^2 - \frac{\pi^2}{12}\,, \quad \frac{1}{12} x(x-\pi)(x-2\pi)\,, \ldots$$

heißen *Bernoulli-Polynome.*

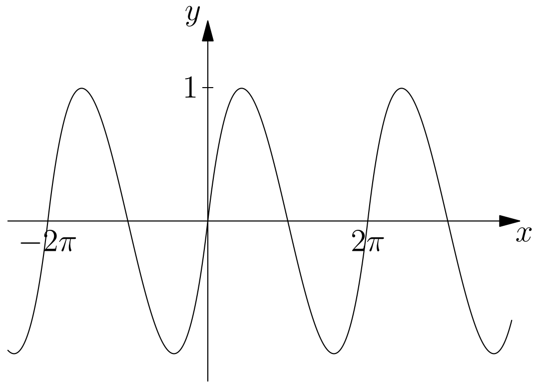


Abbildung 11.4: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$

Definition 11.1.
Die Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn es endlich viele Punkte

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$$

gibt, so dass $f(t)$ stetig im Intervall (t_i, t_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ist.

Sei $\mathcal{C}(T)$ der Vektorraum der auf dem Intervall $[0,T]$ stückweise stetigen Funktionen. Durch

$$\|f\| := \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

wird auf $\mathcal{C}(T)$ eine Norm definiert. Dies gilt auch für komplexwertige Funktionen $f : [0,T] \to \mathbb{C}$. Ist $f(t) = u(t) + iv(t)$, so ist

$$\int_0^T f(t)dt := \int_0^T u(t)dt + i\int_0^T v(t)dt$$

Für komplexwertige Funktionen $f, g \in \mathcal{C}(T)$ definiert man

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$$

Die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle f, g\rangle = 0$$

gilt. Ein Funktionensystem $\{f_r | r \in R\}$ heißt *Orthogonalsystem*, wenn die Funktionen paarweise zueinander orthogonal sind.

Satz 11.1.

a) Die Funktion e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, bilden in $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ ein Orthogonalsystem.

b) Die trigonometrischen Funktionen $\cos nx$, $n = 0, 1, \ldots$, und $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$, bilden in $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ ein Orthogonalsystem.

Insbesonders gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx &= \begin{cases} \pi & \text{falls } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = n = 0 \\ \pi & \text{falls } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= 0
\end{aligned}$$

Satz 11.2.

Ist $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig konvergent gegen $f(x)$, dann ist $f(x)$ stetig und für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Ist $f(t)$, $t \in [0, T]$, eine stückweise stetige und T-periodische Funktion, so kann man mit

$$c_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt\,, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

die Fourierreihe S_f von f bilden:

$$S_f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\omega t}$$

Reell geschrieben lautet die Fourierreihe

$$S_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt\,, \quad n = 0, 1, \ldots \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt\,, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Anmerkungen.

- Die Fourier-Reihe muß nicht konvergieren.
- Im Allgemeinen gilt $S_f(t) \neq f(t)$.

Wann stimmt nun $S_f(t)$ mit $f(t)$ überein?

Satz 11.3.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische, stückweise stetige Funktion, die für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t-) + f(t+)\right)$$

erfüllt. Gilt für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}dt = 0,$$

dann ist $f(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Satz 11.4.
Jede 2π-periodische, stückweise stetige Funktion $f(t)$, die die Mittelwerteigenschaft besitzt, stimmt mit ihrer Fourierreihe $S_f(t)$ überein, sofern die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert.

Folgerung.
Haben zwei auf $[0, T]$ stückweise stetige Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ dieselben Fourierkoeffizienten und besitzen sie die Mittelwerteigenschaft, dann gilt

$$f(t) = g(t)$$

Satz 11.5.
Die Fourierreihe einer geraden Funktion ist eine reine Cosinusreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

die Fourierreihe einer ungeraden Funktion ist eine reine Sinusreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Beispiel.
Rechteckschwingung: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

Die zugehörige Fourierreihe lautet:

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$$

Beispiel.
Gleichgerichteter Sinus: $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \dfrac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \dfrac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$

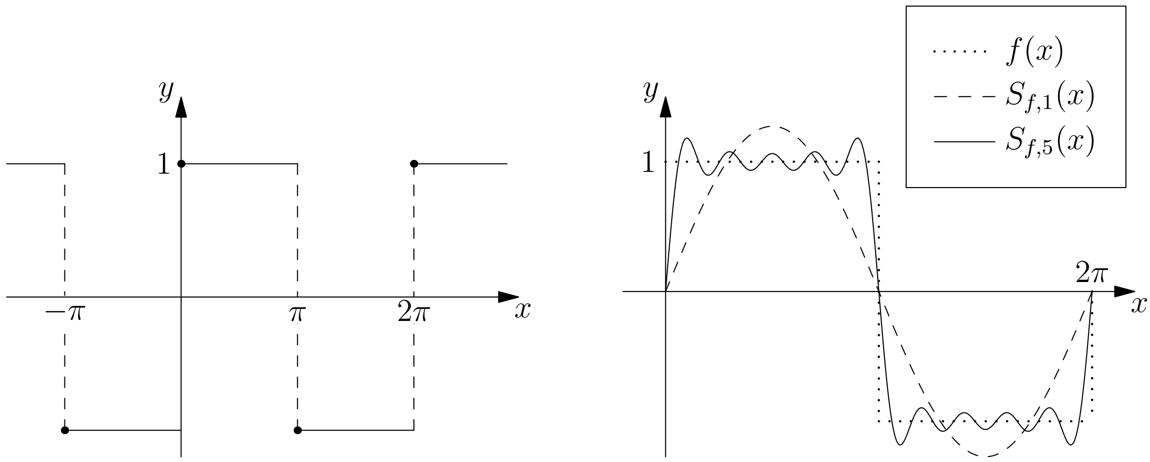


Abbildung 11.5: Die Rechteckschwingung, $S_{f,1}(x) = \frac{4}{\pi}\sin(x)$ und $S_{f,5}(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{5}\frac{\sin(2n-1)}{2n-1}$

Kapitel 12

Uneigentliche Integrale

Bisher integrierten wir stets beschränkte Funktionen auf kompakten Intervallen. Soll eine Funktion auf dem Intervall $[a, \infty)$ integriert werden, führt dies auf ein uneigentliches Integral 1. Art:

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$$

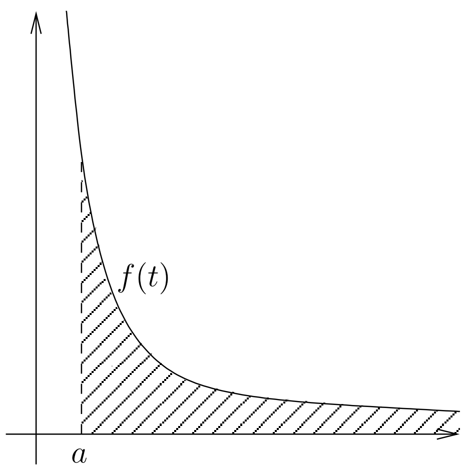


Abbildung 12.1: Uneigentliches Integral 1. Art

Die Integration einer nicht beschränkten Funktion auf einem (halb-)offenen Intervall führt auf ein uneigentliches Integral 2. Art:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)dt$$

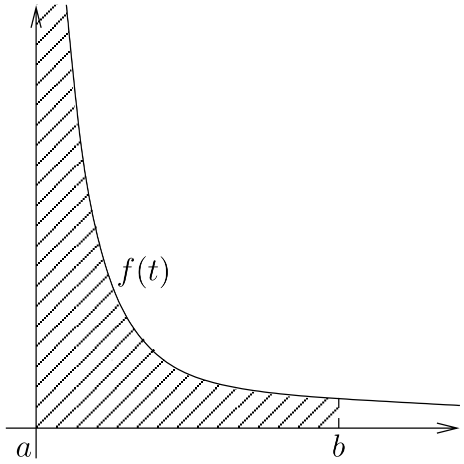


Abbildung 12.2: Uneigentliches Integral 2. Art

12.1 Uneigentliche Integrale 1. Art

Eine Funktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn sie auf jedem kompakten Teilintervall von $[a, \infty)$ integierbar ist. Existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$, so spricht man von einem *konvergenten* Integral $\int_a^\infty f(t)dt$. Wenn der Grenzwert nicht existiert, nennt man das Integral *divergent*.

Beispiel.
$\int_1^\infty \frac{1}{t^r} dt$ ist konvergent für $r > 1$ und divergent für $0 < r \leq 1$.

Bei Integralen der Form $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ müssen die Grenzübergänge gegen $-\infty$ bzw. gegen ∞ unabhängig voneinander durchgeführt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{x_1\to-\infty} \int_{x_1}^{a} f(t)dt + \lim_{x_2\to\infty} \int_{a}^{x_2} f(t)dt$$

Lemma 12.1.
Gilt für alle $x \geq a$: $\int_a^x f(t)dt \leq M$, so ist $\int_a^\infty f(t)dt$ konvergent.

Lemma 12.2.
Ist $f(t)$ integrierbar und $\int_a^\infty |f(t)|dt$ konvergent, so ist auch $\int_a^\infty f(t)dt$ konvergent.

Satz 12.3. (Vergleichskriterium)
$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ seien lokal integrierbar.

1. Gilt $|f(t)| \leq g(t)\ \forall t \in [a, \infty)$ und konvergiert $\displaystyle\int_a^\infty g(t)dt$, dann konvergiert $\displaystyle\int_a^\infty f(t)dt$ und es gilt
$$\left|\int_a^\infty f(t)dt\right| \leq \int_a^\infty |f(t)|dt \leq \int_a^\infty g(t)dt$$

2. Gilt $0 \leq g(t) \leq f(t)$ für alle $t \geq a$ und divergiert $\displaystyle\int_a^\infty g(t)dt$, dann divergiert auch $\displaystyle\int_a^\infty f(t)dt$.

Satz 12.4. (Cauchy'sches Integralkriterium)
Ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ lokal integrierbar und monoton fallend, so gilt für $a_n := f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)dt \text{ konvergent}$$

Beispiele.
$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergent, denn $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = 1$
$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergent, denn $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{n}dt = \lim_{x\to\infty} \ln x$ divergent

Satz 12.5.
Ist $f : [m, \infty) \to \mathbb{R}_+$ lokal integrierbar und monoton fallend, dann besitzt die Folge (c_n) mit

$$c_n := \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(t)dt$$

einen Grenzwert c mit $0 \leq c \leq f(m)$.

Beispiel.
$f(t) = \frac{1}{t}$ und $m = 1$ führt auf

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx\right) =: C \ldots \text{„\textit{Euler-Mascheroni}“-\textit{sche Konstante}}$$

$C = 0,577215664\ldots$

12.2 Uneigentliche Integrale 2. Art

Ist $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, so definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)dt$$

Existiert der Grenzwert, so nennt man das Integral *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Beispiele.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ und $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt$ sind konvergent für $0 < \alpha < 1$ und divergent für $\alpha \geq 1$.

Satz 12.6. (Vergleichskriterium)
Sind $f,\ g : (a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

1. Ist $\forall t \in (a,b]$: $0 \leq |f(t)| \leq g(t)$ und $\exists \displaystyle\int_a^b g(t)dt$, dann konvergiert $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

2. Gilt $0 \leq g(t) \leq f(t)$ für alle $a \leq t \leq b$ und divergiert $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$, dann divergiert auch $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Beispiel.
Um zu zeigen, dass $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$ konvergiert, bestimmt man eine Majorante durch folgenden Trick: Da $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$ für jedes $\alpha > 0$ gilt, gibt es für jedes feste α eine Konstante C_α mit $|t^\alpha \ln t| \leq C_\alpha$ für $0 \leq t \leq 1$. Daher ist $\left|\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right| \leq C_\alpha \frac{1}{t^{\alpha + \frac{1}{2}}}$ und man erhält mit $\alpha := \frac{1}{4}$ eine konvergente Majorante.

12.3 Die Gammafunktion $\Gamma(x)$

Definition 12.1.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Die Gammafunktion ist für alle $x > 0$ wohldefiniert.

Satz 12.7.

$$\Gamma(1) = 1\,, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Ferner gilt:

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-n^2} dn \quad \left(= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

Daher gilt für das Gauß'sche Fehlerintegral:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

Satz 12.8. (Wallis'sches Produkt, 1656)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots$$

Abbildung 12.3: John Wallis (1616 - 1703)

Satz 12.9. (Stirling'sche Formel, 1730)
$\Gamma(n+1) = n!$ wächst asymptotisch wie $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Es gilt

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} \leq e^{\frac{1}{12n}}.$$

Kapitel 13

Kurven

13.1 Parameterdarstellung von Kurven

Auf der Menge $\mathscr{F}$ aller stetigen Abbildungen von kompakten Intervallen in den $\mathbb{R}^n$ führt man folgende Äquivalenzrelation ein. Die Abbildungen $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent, wenn es eine streng monoton wachsende, stetige Abbildung $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ gibt mit

$$f(t) = g(\varphi(t)) \quad \forall t \in [a,b].$$

Jede Äquivalenzklasse in $\mathscr{F}$ heißt *orientierte Kurve* im $\mathbb{R}^n$. Jeder Repräsentant $f \in \mathscr{F}$ heißt *Parameterdarstellung* der Kurve $\mathcal{C}$. Wir werden als Parameterdarstellung meist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } a \le t \le b$$

verwenden. Die Abbildung $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ wird als *Parametertransforamtion* bezeichnet. Die Kurve $\mathcal{C}$ beschrieben durch $\vec{x}(t)$ heißt *geschlossen*, wenn $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$ gilt. Eine orientierte Kurve, die im umgekehrten Sinn von $\mathcal{C}$ durchlaufen wird, wird mit $-\mathcal{C}$ bezeichnet.

Definition 13.1.
Seien $\mathcal{C}_1 : \vec{x}(t)$ eine Kurve mit Anfangspunkt $\vec{x}(a)$ und Endpunkt $\vec{x}(b)$ und $\mathcal{C}_2 : \vec{y}(t)$ eine zweite Kurve mit Anfangspunkt $\vec{x}(b) = \vec{y}(b)$ und Endpunkt $\vec{y}(c)$. Dann ist die *Summe der Kurven* definiert als

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 : \vec{z}(t) := \begin{cases} \vec{x}(t) & \text{für } a \le t \le b \\ \vec{y}(t) & \text{für } b \le t \le c \end{cases}$$

Beispiele.

(1) Ellipse: $\begin{array}{l} x_1 = a\cos t \\ x_2 = b\sin t \end{array} \quad 0 \le t \le 2\pi$

(2) Schraubenlinie mit Ganghöhe $2\pi h$: $\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{array} \quad 0 \le t \le 2\pi$

Eine Kurve heißt *Jordankurve*, wenn außer Anfangs- und Endpunkt kein Punkt der Kurve mehrfach durchlaufen wird. Ein wichtiger Satz der Topologie ist der Jordan'sche Kurvensatz. Eine offene Teilmenge G der Ebene $\mathbb{R}^2$ heißt *einfach zusammenhängendes Gebiet*, wenn sich jede geschlossene Kurve in G *stetig* auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

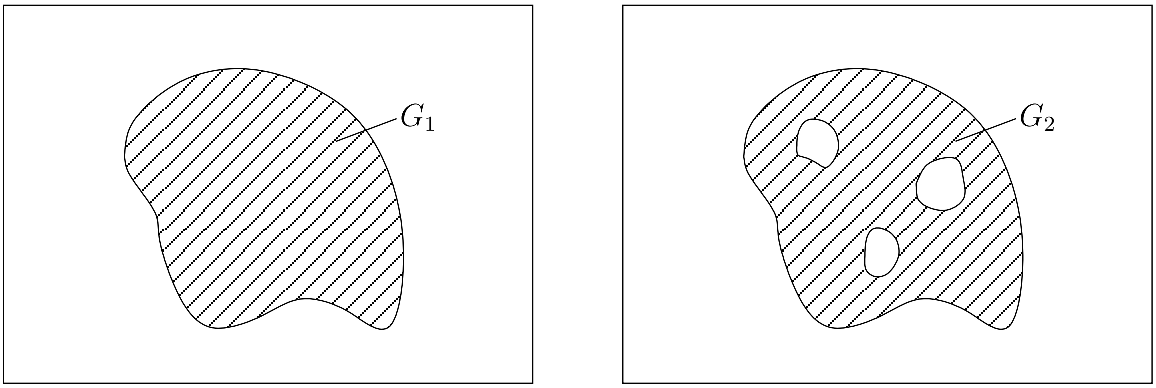


Abbildung 13.1: G_1 ist einfach zusammenhängend, G_2 nicht.

Jordan'scher Kurvensatz:
Jede geschlossene Jordankurve in der Ebene zerteilt die Ebene in genau zwei Bereiche: in ein einfach zusammenhängendes Innengebiet und in ein nicht zusammenhängendes Außengebiet.

Der bisher betrachtete Kurvenbegriff ist noch zu allgemein. Eine solche Kurve könnte keine Tangente besitzen, keine endliche Bogenlänge haben, ja sogar alle Punkte eines Quadrats ausfüllen (*Peano-Kurven*).

Definition 13.2.
Eine Kurve $\vec{x}(t)$, $a \leq t \leq b$, heißt *glatt*, wenn für alle $a < t < b$ die Ableitungen $\dot{x}_i(t)$ existieren und stetig sind und $\|\dot{\vec{x}}(t)\| \neq 0$ gilt.
Eine Kurve heißt *stückweise glatt*, wenn sie eine endliche Summe glatter Kurven ist.
Eine Parametertransformation $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ heißt *zulässig*, wenn φ stetig differenzierbar und $\varphi'(t) > 0$, $a < t < b$, ist.

Anmerkung.
Durch eine zulässige Parametertransformation geht eine glatte Kurve in wieder eine glatte Kurve über.

Eigenschaften, die invariant gegenüber zulässigen Parametertransformationen sind, nennt man *geometrische Eigenschaften* der Kurve.

Definition 13.3.
Der *normierte Tangentenvektor* im Punkt $\vec{x}(t_0)$ ist definiert als

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}(t_0)\|}\dot{\vec{x}}(t_0)$$

Definition 13.4.
Die *Bogenlänge* der Kurve $\mathcal{C}$ zwischen a und b ist

$$L(\mathcal{C}) := \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt$$

Die Bogenlänge ist eine geometrische Eigenschaft der Kurve. Die Bogenlänge einer Kurve, die in Polarkoordinaten (r, φ) gegeben ist, lautet

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2} dt$$

Beispiel.
Bogenlänge der logarithmischen Spirale $\varphi = \ln r$, $-\infty < \varphi < 0$: $L = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2}$

Als *natürlicher Parameter* zur Beschreibung von Kurven bietet sich ihre Bogenlänge $s = s(t)$ an. Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{d}{dt}\int_a^t \|\dot{\vec{x}}(\tau)\| d\tau = \|\dot{\vec{x}}(t)\| \\ \ddot{s} &= \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}_1^2 + \ldots + \dot{x}_n^2} = \frac{2\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \ldots + 2\dot{x}_n\ddot{x}_n}{2\|\dot{\vec{x}}\|} = \frac{\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle}{\|\dot{\vec{x}}\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{x}' \cdot \dot{s} & \qquad \vec{x}' &= \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}\|} \cdot \dot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{x}} &= \vec{x}'' \cdot \dot{s}^2 + \vec{x}' \cdot \ddot{s} & \qquad \vec{x}'' &= \frac{1}{\dot{s}^2}\ddot{\vec{x}} - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^3}\dot{\vec{x}} = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}\|^2}\left(\ddot{\vec{x}} - \frac{\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle}{\|\dot{\vec{x}}\|^2} \cdot \dot{\vec{x}}\right) \end{aligned}$$

Der Vektor $\vec{x}'(s)$ hat die Länge 1, also ist

$$\vec{v}_1 = \vec{x}'(s)$$

Definition 13.5.
Hauptnormalenvektor: $\vec{v}_2 := \dfrac{\vec{x}''}{\|\vec{x}''\|}$
Binormalenvektor: $\vec{v}_3 := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

Die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ haben die Länge 1 und sind paarweise zueinander orthogonal. Sie bilden im Kurvenpunkt $\vec{x}(s)$ das *begleitende Dreibein* einer Raumkurve.

Definition 13.6.
Die *Schmiegebene* wird von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannt:

$$|\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2| = 0$$

Die *Normalebene* wird von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ aufgespannt:

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{v}_1 \rangle = 0$$

Die *Streckebene* wird von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ aufgespannt:

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{v}_2 \rangle = 0$$

13.2 Ebene Kurven, Krümmungskreis

Eine ebene Kurve ist durch $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben.

Definition 13.7.
Die *Krümmung* κ einer ebenen Kurve ist gegeben durch

$$\kappa := \frac{d\alpha}{ds} \ ,$$

wobei α der Winkel ist, den die Tangente mit der positiven x-Achse einschließt.

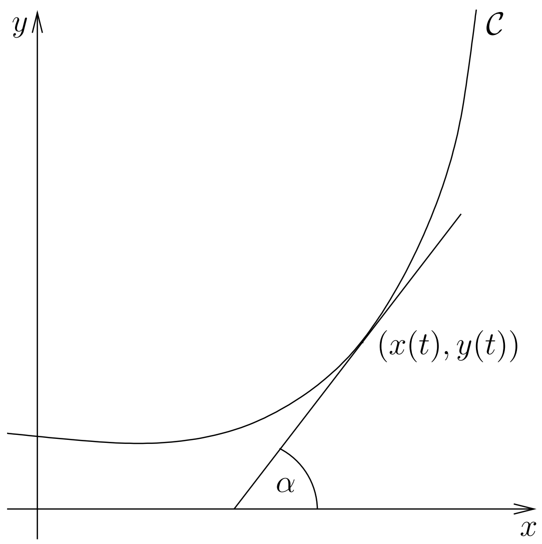


Abbildung 13.2

Falls $\kappa > 0$ ist, liegt eine *Linkskurve* vor, bei $\kappa < 0$ eine *Rechtskurve.*
Formeln zur Berechnung der Krümmung sind:

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Beispiel.
Ein Kreis $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, hat die Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$. Wird der Kreis in umgekehrter Richtung durchlaufen, so ist $\kappa = -\frac{1}{r}$.

Definition 13.8.
Der *Krümmungskreis* einer Kurve im Punkt $(x(t_0),\ y(t_0))$ ist jener Kreis, der in diesem Kurvenpunkt die gleiche Tangente und die gleiche Krümmung wie die Kurve hat.
Mittelpunkt des Krümmungskreises:

$$x_m = x(t_0) - \dot{y}(t_0) \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

$$y_m = y(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

Die Mittelpunkte der Krümmungskreise liegen wieder auf einer Kurve, der *Evolute* von $\mathcal{C}$. Die Ausgangskurve heißt in diesem Zusammenhang die *Evolvente.* Die Evolute hat eine Spitze, wo die Evolvente einen Scheitel hat.

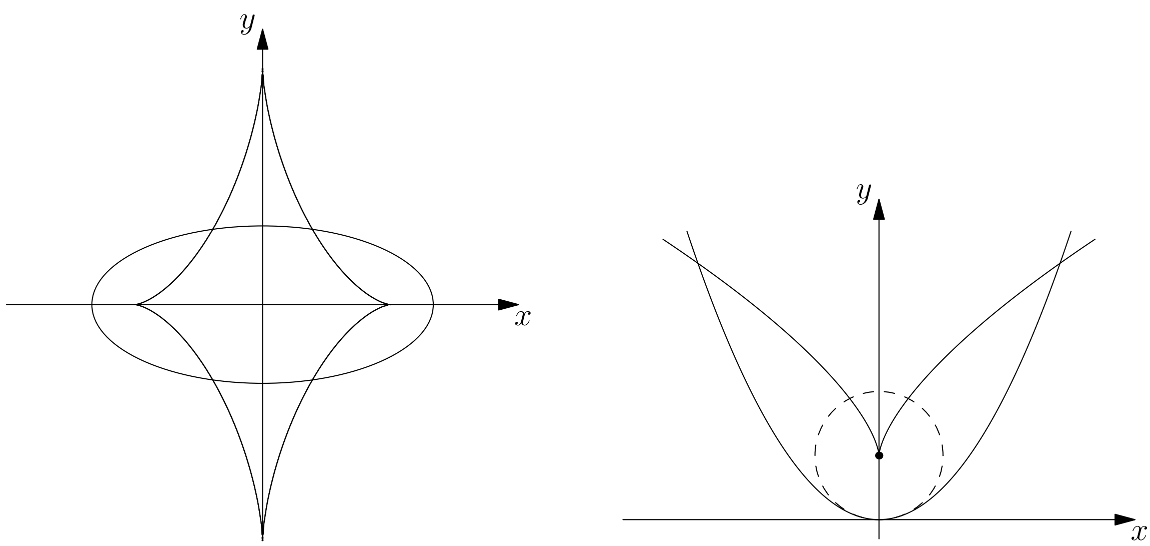


Abbildung 13.3: Evolute einer Ellipse und einer Parabel

13.3 Krümmung und Torsion von Raumkurven, Frenet'sche Formeln

Im Gegensatz zu ebenen Kurven definiert man die Krümmung von Raumkurven als

$$\kappa := \|\vec{v}_1'\| = \|\vec{x}''\|$$

d.h. die Krümmung von Raumkurven ist immer *nicht negativ*! Die Krümmung einer Kurve ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von einer Geraden.

Man erhält

$$\kappa = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}\sqrt{\|\dot{\vec{x}}\|^2 \cdot \|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle^2}$$

Für ebene Kurven erhält man daraus den Absolutbetrag der früher definierten Krümmung ebener Kurven, nämlich

$$\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Änderung des Binormalenvektors $\vec{v}_3$ mit der Bogenlänge ist ein Maß dafür, wie stark sich die Kurve aus ihrer Schmiegebene herauswindet.

Definition 13.9.
Die *Torsion* (*Windung*) ist definiert durch

$$\tau := \pm\|\vec{v}_3'\|$$

Dabei wird das Vorzeichen „+“ bei einer rechtsgewundenen Kurve (Rechtsschraube) gewählt, und „-“ bei einer Linksschraube.

$$\tau = \frac{(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{\|\dot{\vec{x}}\|^2 \cdot \|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle^2}$$

Beispiel.
Die Torsion einer Schraubenlinie $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ bilden eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{R}^3$. Daher lassen sich die Ableitungen $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ und $\vec{v}_3'$ als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen (*Frenet'sche Formeln*):

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1' \\ \vec{v}_2' \\ \vec{v}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

Kapitel 14

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

14.1 Topologische Grundbegriffe

Definition 14.1.
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $O \subseteq X$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in O$ eine offene Kugel $K_\varepsilon(x)$ gibt mit $K_\varepsilon(x) \subseteq O$.

Nach Satz 1.1 ist insbesondere eine offene Kugel eine offene Menge.

Satz 14.1.
Eigenschaften offener Mengen:

(O1) Die leere Menge und der ganze Raum sind offen.

(O2) Die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist offen.

(O3) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Achtung: Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen braucht *nicht* offen zu sein! So gilt etwa

$$\bigcap_{\alpha>0}(-\alpha, \alpha) = \{0\}$$

Eine Menge X und ein System, das (O1) bis (O3) erfüllt, heißt *topologischer Raum*. Insbesondere ist jeder metrische Raum ein topologischer Raum.

Definition 14.2.
Ist (X, O) ein topologischer Raum, dann heißt $A \subseteq X$ *abgeschlossen*, wenn das Komplement von A eine offene Menge ist, also in O liegt.

Satz 14.2.
Eigenschaften abgeschlossener Mengen:

- **(A1)** Die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen.
- **(A2)** Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- **(A3)** Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Achtung: Die Vereinigung von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen muß *nicht* abgeschlossen sein. So ist in $\mathbb{R}$ die Vereinigung der abgeschlossenen Mengen $[-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$, das offene Intervall $(-1, 1)$.

Eigenschaften, die nur auf offenen (abgeschlossenen) Mengen beruhen, heißen *topologische Eigenschaften.*

Satz 14.3.
Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. Dann gilt

1. $f : X \to X'$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(O')$ jeder offenen Menge O' in X' wieder offen in X ist.
2. $f : X \to X'$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(A')$ jeder abgeschlossenen Menge A' in X' wieder abgeschlossen in X ist.

Dieser Satz zeigt, dass Stetigkeit eine topologische Eigenschaft ist.

14.2 Partielle Ableitungen

Im Folgenden sei stets $X = \mathbb{R}^n$. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei der Definitionsbereich einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$. Die Funktion $x_k \rightsquigarrow f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ wird als *partielle Funktion* von f im Punkt a bezeichnet.

Achtung: Aus der Stetigkeit der partiellen Funktionen in a folgt nicht die Stetigkeit von f in a.

Beispiel.
Gegeben sei die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Die Funktionen $f(x_1, 0)$ und $f(0, x_2)$ sind identisch 0, also stetig, aber f ist nicht stetig im Ursprung, denn für die Folge $(t, t) \to (0, 0)$ gilt $f(t, t) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$.

Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt *Vektorfeld*. Diese Abbildung läßt sich schreiben als

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

mit den Koordinatenfunktionen $f_i(\vec{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Anmerkung.
Ein Vektorfeld f ist genau dann stetig, wenn jede seiner Koordinatenfunktionen stetig ist.

Beispiele für Vektorfelder sind: Kraftfeld, Gravitationsfeld, elektromagnetisches Feld, Strömungsfeld.

Definition 14.3.
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $a \in D$. Existiert die Ableitung der partiellen Funktion $f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ an der Stelle $x_k = a_k$, so nennt man sie *partielle Ableitung* von f nach x_k an der Stelle a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) \text{ oder } f_{x_k}(\vec{a})$$

Es gilt

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_k} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(\vec{a} + t\vec{e}_k) - f(\vec{a}))$$

wobei $\vec{e}_k$ der k-te Einheitsvektor ist.

Beispiel.
Schalldruck einer Schallwelle: $P(x, y, z, t) = A(\sin \alpha x + \sin \beta y + \sin \gamma z - \omega t)$

$P_x \, (= \dfrac{\partial P}{\partial x}) \ldots$ Schalländerung in x-Richtung

$P_t \, (= \dfrac{\partial P}{\partial t}) \ldots$ zeitliche Schalländerung an einem festen Ort

Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : D \, (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ fasst man zum *Gradientenvektor*

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = (f_{x_1}(x), \ldots, f_{x_n}(x))$$

zusammen. Der Operator „∇“ wird als *Nabla-Operator* bezeichnet.

Ordnet man jedem $\vec{x} \in D$ die partielle Ableitung $f_{x_i}(\vec{x})$ zu, so erhält man eine Abbildung

$$f_{x_i} : D \to \mathbb{R} \quad \ldots \text{ „partielle Ableitung von } f \text{ nach } x_i\text{“}$$

Insbesondere erhält man dann für den Gradienten ein Vektorfeld

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f : D &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\rightsquigarrow (f_{x_1}(\vec{x}), \ldots, f_{x_n}(\vec{x})) \end{aligned}$$

das *Gradientenfeld* von f genannt wird.

Aus der Existenz der partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $\vec{x}$ *folgt nicht* die Stetigkeit von f in $\vec{x}$ (vgl. das erste Beispiel in Abschnitt 14.2).

Definition 14.4.
Sind die partiellen Ableitungen $f_{x_i} : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, in $\vec{x}$ stetig, so nennt man f *stetig differenzierbar* in $\vec{x}$.

Wir zeigen später: Ist f stetig differenzierbar in $\vec{x}$, so ist f in $\vec{x}$ stetig.

Besitzt die Funktion $f_i : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $\vec{x}$ die partielle Ableitung nach x_j, so nennt man

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f_{x_i}(\vec{x})) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = f_{x_i x_j}(\vec{x}) \quad \text{mit } f_{x_i x_j} : D \to \mathbb{R}$$

die *zweite* partielle Ableitung von f nach x_i und x_j. Die zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $\vec{x}_0$ werden in der *Hesse-Matrix* $H_f(\vec{x}_0)$ zusammengefasst:

$$H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Die Funktion

$$f_{x_i x_j} : D \to \mathbb{R}$$

heißt zweite partielle Ableitung von f nach x_i und x_j. Ist diese Funktion partiell differenzierbar, so erhält man analog zu oben die dritten partiellen Ableitungen. Höhere partielle Ableitungen werden in gleicher Weise rekursiv definiert.

Definition 14.5.
$\mathcal{C}^0 \ldots$ Klasse der stetigen Funktionen auf D
$\mathcal{C}^k \ldots$ Klasse der k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf D, also der Funktionen f, deren k-ten partiellen Ableitungen alle existieren und auf ganz D stetig sind.

Achtung: Bei der Bildung höherer partieller Ableitungen kommt es im Allgemeinen auf die Ableitungsreihenfolge an!

Beispiel.
Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

besitzt im Punkt $(0,0)$ die partiellen Ableitungen

$$f_x(0,0) = 0 \ , \ f_y(0,0) = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = -1 \ , \ f_{yx}(0,0) = +1$$

Also ist $f_{xy} \neq f_{yx}$.

Satz 14.4. (Satz von Schwarz)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x_0} \in D$. Hat $f : D \to \mathbb{R}$ stetige zweite partielle Ableitungen in x, so gilt

$$f_{x_i x_j}(\vec{x_0}) = f_{x_j x_i}(\vec{x_0}) \quad \text{für alle } 1 \leq i,j \leq n$$

Anmerkung.
Sind die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllt, dann ist die Hesse-Matrix $H_f(\vec{x_0})$ symmetrisch.

14.3 Totale Differenzierbarkeit

Definition 14.6.
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{x}_0 \in D$. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in $\vec{x}_0$ *total differenzierbar* (= *linear approximierbar*), wenn es einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \vec{a}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

Mit anderen Worten: Es gibt eine lineare Funktion $\langle \vec{a}, \cdot \rangle$, die $f(\vec{x})$ im Punkt $\vec{x}_0$ so approximiert, dass der Fehler mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ gegen 0 geht.

Satz 14.5.
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0$ total differenzierbar, dann gilt

1. f ist stetig in $\vec{x}_0$
2. Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq 0$ ist

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)] = \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle$$

3. f ist partiell differenzierbar in $\vec{x}_0$ und

$$\vec{a} = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$$

4. Die Taylorformel 1.Ordnung lautet

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot r(x)$$

wobei $r(x)$ eine in $\vec{x}_0$ stetige Abbildung mit $r(\vec{x}_0) = 0$ ist.

Geometrische Interpretation im $\mathbb{R}^3$:
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Durch $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, wird eine Fläche im Raum definiert. Die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ an die Fläche hat die Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Dies zeigt, dass der Gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ die Normale der Tangentialebene beschreibt.

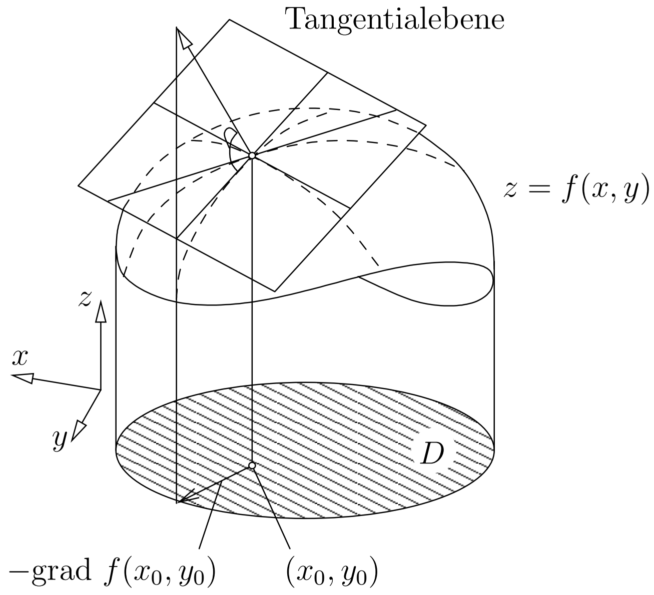


Abbildung 14.1: Tangentialebene

Satz 14.6. (stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ total differenzierbar)
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und f sei stetig partiell differenzierbar in D. Dann ist f in jedem $x \in D$ total differenzierbar, wobei die zugehörige lineare Abbildung $df(\centerdot)$ durch

$$\langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \centerdot \rangle$$

beschrieben wird.

Achtung: Die Umkehrung des Satzes 14.6 gilt *nicht*!

Beispiel.
Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist im Ursprung $(0,0)$ total differenzierbar, aber die partiellen Funktionen $f(x,0)$ und $f(0,y)$ sind in $(0,0)$ nicht stetig. Also existieren keine partiellen Ableitungen in $(0,0)$.

Die lineare Funktion, die der totalen Ableitung von f in $\vec{x}_0$ entspricht, wird mit df_{x_0} bezeichnet. Ist f selbst eine lineare Funktion $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$, so ist $df_x = \langle \vec{a}, \boldsymbol{.} \rangle$ für alle $\vec{x}$. Insbesondere schreibt man für $\vec{a} = \vec{e}_i$ (Einheitsvektor): $df = dx_i$
Damit erhält man

$$\begin{aligned} df_{x_0}(h) &= \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), h \rangle = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \cdot h_n = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1(h) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n(h) \end{aligned}$$

also:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n}$$

Definition 14.7.
Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ und eine Richtung $\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\partial_v f(\vec{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)]$$

so heißt er die *Richtungsableitung* von f in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$.

Die Richtungsableitung von f ist die Ableitung der auf die Gerade $\vec{x}_0 + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ eingeschränkten Funktion f.

Satz 14.7.

1. $\partial_v f(\vec{x}_0) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle$
2. Der Gradient von f in $\vec{x}_0$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt $\vec{x}_0$ an.

Anwendung: Gradientenverfahren.

Ist $\vec{x}(t)$ eine Kurve auf der durch $f(\vec{x}) = c$ gegebenen Fläche, dann erhält man durch Differentiation von $f(\vec{x}(t)) = c$ nach t:

$$\langle \operatorname{grad} f(\vec{x}(t_0)), \dot{\vec{x}}(t_0) \rangle = 0,$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf die Tangentialebene an die Fläche im Punkt $\vec{x}_0$. Die Gleichung

$$\langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle = 0$$

ist die Normalengleichung der Tangentialebene im Punkt $\vec{x}_0$.

Beispiel.
Die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0) an das Paraboloid $x^2 + y^2 - z = 0$ lautet:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

also

$$2x_0x + 2y_0y - z = 2x_0^2 + 2y_0^2 - z_0.$$

Das folgende Diagramm fasst die Differenzierbarkeitsbeziehungen zusammen (kein Pfeil ist umkehrbar!):

$$\begin{tikzcd}
\text{stetig partiell differenzierbar} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \text{total differenzierbar} \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[d] \\
& \text{stetig} & \text{partiell differenzierbar} \\
& \text{alle Richtungsableitungen existieren} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Differentiation von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\vec{x}_0 \in D$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$. Die Funktion f heißt im Punkt $\vec{x}_0$ *(stetig) partiell differenzierbar*, wenn alle ihre Koordinatenfunktionen f_i, $i = 1, 2, ..., m$, (stetig) partiell differenzierbar sind. Somit wird die partielle Ableitung von f im Punkt $\vec{x}_0$ durch die $(m \times n)$-Matrix

$$J_f(\vec{x}_0) := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Matrix $J_f(\vec{x}_0)$ heißt *Jacobi-* oder *Funktionalmatrix* von f im Punkt $\vec{x}_0$.

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$. Die Jacobimatrix von f lautet

$$J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_1x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_1x_3 & -x_2x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Definition 14.8.
Es sei D eine offene menge im $\mathbb{R}^n$ und $\vec{x}_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt in $\vec{x}_0$ *total differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, für die gilt:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|}(f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) - u(\vec{h})) = 0$$

Die lineare Abbildung u heißt das *totale Differential* von f im Punkt $\vec{x}_0$.

Wie im Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt, dass die lineare Abbildung $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch die Jacobimatrix $J_f(\vec{x}_0)$ beschrieben werden kann.

Satz 14.8. (Kettenregel)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\vec{x}_0 \in D$, $\vec{y}_0 \in G$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : G \to \mathbb{R}^p$ und $f(D) \subseteq G$. Ist f in $\vec{x}_0$ und g in $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$ total differenzierbar, dann ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ total differenzierbar und es gilt

$$J_{g \circ f}(\vec{x}_0) = J_g(\vec{y}_0) \cdot J_f(\vec{x}_0)$$

14.4 Taylorformel für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Setzt man $F(t) := f(x_0 + th, y_0 + tk)$, so erhält man unter Anwendung der Kettenregel

Satz 14.9. (Taylorformel für Funktionen in 2 Variablen)
$D \subseteq R^2$ sei offen und enthalte die Strecke $(x_0 + th, y_0 + tk)$, $0 \leq t \leq 1$. Ist f $(n+1)$-mal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = & f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{2}[h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)] + \ldots + \\ & + \frac{1}{n!}[h^n f_{x \ldots x}(x_0, y_0) + n h^{n-1} k f_{x \ldots xy}(x_0, y_0) + \ldots + k^n f_{y \ldots y}(x_0, y_0)] + R_{n+1} \end{aligned}$$

Beispiel.
Taylorentwicklung 2.Ordnung von $f(x, y) = \ln(x - y)$ um den Punkt $(0, -1)$:

$$\ln(x - y) = x - (y + 1) + \frac{1}{2}[-x^2 + 2x(y + 1) - (y + 1)^2] + R_3$$

Analog zeigt man für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mittels der Kettenregel

Satz 14.10. (Taylorformel 1.Ordnung)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in D$, $\vec{x}_0 + t\vec{h} \in D$ für alle $0 \leq t \leq 1$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gibt es ein δ mit $0 < \delta < 1$, so dass

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle + R_2 \\ \text{mit } R_2 &= \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) h_i h_j \\ &= \frac{1}{2!} \vec{h}^t H_f(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) \vec{h} \end{aligned}$$

Satz 14.11. (Taylorformel 2.Ordnung)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in D$, $\vec{x}_0 + t\vec{h} \in D$ für alle $0 \leq t \leq 1$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig partiell differenzierbar. Dann gibt es ein δ mit $0 < \delta < 1$, so dass

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle + \frac{1}{2} \vec{h}^t H_f(\vec{x}_0) \vec{h} + R_3 \\ \text{mit } R_3 &= \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) h_i h_j h_k \end{aligned}$$

Beispiel.
Für $f(\vec{x}) = \sin(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ und $\vec{x}_0 = 0$ erhält man

$$\sin(\|\vec{x}\|^2) = \frac{1}{2} \vec{x}^t \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + R_3 = \|\vec{x}\|^2 + R_3$$

14.5 Lokale Extrema

Satz 14.12. (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Falls f in $\vec{x}_0$ ein lokales Extremum besitzt, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = 0$$

Punkte $\vec{x} \in D$ mit $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0$ heißen *kritische Punkte.*

In der linearen Algebra wurde definiert:

Eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix A heißt *positiv* (*negativ*) *definit*, wenn für alle $\vec{x} \neq 0$ gilt $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$ (bzw. $\vec{x}^t A \vec{x} < 0$). Die Matrix A heißt *indefinit*, wenn es ein $\vec{x}$ mit $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$ und ein y

mit $\vec{y}^t A \vec{y} < 0$ gibt.

Ferner wurde in der linearen Algebra gezeigt (Satz 8.4):

Satz.
Gegeben sei eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$. Für jedes k, $1 \leq k \leq n$, definieren wir die $(k \times k)$-Matrix A_k durch

$$A_k = (a_{ij}) \quad \text{mit } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$$

Dann gilt:

1. Ist $\det A_k > 0$ für alle k, dann ist A positiv definit.
2. Ist $(-1)^k \det A_k > 0$ für alle k, dann ist A negativ definit.

Nun gilt:

Satz 14.13. (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. $\vec{x}_0$ sei ein kritischer Punkt von f. Dann gilt:

1. Ist die Hessematrix $H_f(\vec{x}_0)$ positiv definit, dann hat f in $\vec{x}_0$ ein strenges lokales Minimum.
2. Ist $H_f(\vec{x}_0)$ negativ definit, dann hat f in $\vec{x}_0$ ein strenges lokales Maximum.
3. Ist $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit, dann hat f in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

Ein Punkt $\vec{x}_0$ wird als Sattelpunkt bezeichnet, wenn es eine Richtung $\vec{h}$ gibt, so dass $f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$, $t \in \mathbb{R}$, in $\vec{x}_0$ ein Minimum hat, und eine Richtung $\vec{k}$, so dass $f(\vec{x}_0 + t\vec{k})$, $t \in \mathbb{R}$, in $\vec{x}_0$ ein Maximum hat.

Beispiel.
$f(x, y) = x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2$ hat 3 kritische Punkte, nämlich $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ und $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Die Hessematrix lautet

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 12x^2 - 4y^2 & -8xy \\ -8xy & -2 - 4x^2 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

Für P_1 erhält man $H_f(0, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, also eine indefinite Matrix. Somit ist P_1 ein Sattelpunkt.
Für P_2 und P_3 erhält man

$$H_f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

also eine negativ definite Matrix. Somit nimmt f in P_2 und P_3 jeweils ein lokales Maximum an.

Achtung: Im Fall, dass $\det H_f(\vec{x}_0) = 0$ ist, läßt sich keine Aussage treffen: Alles bleibt möglich!!

Um globale Extrema von f zu bestimmen, ist auch das Verhalten von f am Rand des Definitionsbereiches zu untersuchen!

14.6 Der Satz von der Umkehrfunktion, implizite Funktionen

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: Ist $f(x)$ stetig differenzierbar und gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0, in der $f'(x)$ monoton und daher invertierbar ist. Das analoge Resultat für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird durch den Satz von der Umkehrfunktion geliefert.

Satz 14.14. (Satz von der Umkehrfunktion)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar und die Jacobimatrix $J_f(\vec{x}_0)$ in einem $\vec{x}_0 \in D$ regulär. Dann gibt es eine Umgebung von $\vec{x}_0$, in der f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt. f^{-1} ist in einer Umgebung von $f(\vec{x}_0)$ stetig partiell differenzierbar.

Zum Beweis des Satzes von der Umkehrfunktion greift man auf Hilfsmittel aus der linearen Algebra zurück. Es sei daran erinnert, dass eine Matrixnorm $\|A\|$ *verträglich* mit der Vektornorm heißt, wenn für alle x gilt

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| .$$

Insbesondere ist die *Frobenius-Norm*

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

verträglich mit der Euklidischen Norm von Vektoren. Ferner verwenden wir Lemma 2.2.2 aus der linearen Algebra, das besagt:

Gilt für die $(n \times n)$-Matrix B, dass $\|B\| < 1$ ist, dann ist $(I - B)$ invertierbar.

Als weiteres technisches Hilfsmittel im Beweis verwenden wir folgendes Lemma:

Lemma 14.15.
Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $\vec{x}$ und $\vec{x} + \vec{h} \in D$, $\vec{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

1. $f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \displaystyle\int_0^1 J_f(\vec{x} + t\vec{h})\vec{h}\, dt$ (komponentenweise)

2. $\|f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x})\| \leq \|\vec{h}\| \cdot \sup\limits_{0\leq t\leq 1} \|J_f(\vec{x}+t\vec{h})\|$

3. $\|f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - J_f(\vec{x}_0)\vec{h}\| \leq \|\vec{h}\| \cdot \sup\limits_{0\leq t\leq 1} \|J_f(\vec{x}+t\vec{h}) - J_f(\vec{x}_0)\|$

Definition 14.9.
Die Determinante der Jacobimatrix heißt *Funktionaldeterminante* von f im Punkt $\vec{x}$:

$$\det J_f(\vec{x}) := \left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right| := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Anmerkung.
Die Regularitätsvoraussetzung des Satzes über die Umkehrfunktion ist insbesondere erfüllt, wenn die Funktionaldeterminante im Punkte $\vec{x}_0$ ungleich Null ist.

Beispiel. (Polarkoordinaten)
Wann ist

$$\begin{aligned} x(r,\varphi) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

eindeutig nach r und φ auflösbar?
Da $\det J_f(r,\varphi) = r$, muss in diesem fall $r \neq 0$ gelten. Dies ist äquivalent zu $(x,y) \neq (0,0)$.

Anwendung auf Lösbarkeit eines nichtlinearen Gleichungssystems:

Satz 14.16.
Sind $f_i : D \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ gegebene stetig partiell differenzierbare Funktionen und besitzt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= b_1 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= b_n \end{aligned}$$

eine Lösung $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ mit $J_f(\vec{a}) \neq 0$, dann besitzt dieses Gleichungssystem für jedes „hinreichend nahe“ bei $\vec{b}$ gelegene $\vec{y}$ genau eine Lösung $\vec{x}$ „in der Nähe“ von $\vec{a}$ und die Lösung hängt stetig partiell differenzierbar von $\vec{y}$ ab.

Implizite Funktionen

Ist (x,y) implizit durch $x^2+y^2=r^2$ gegeben, so kann man y durch

$$y(x) = \sqrt{r^2-x^2} \text{ oder } y(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$$

ausdrücken. Sofern ein Punkt (x, y) mit $y \neq 0$ vorliegt, ist in einer Umgebung dieses Punktes die Funktion $y(x)$ eindeutig gegeben.
Im Falle eines linearen Gleichungssystems mit einer $(n \times m)$-Matrix A und einer $(n \times n)$-Matrix B:

$$Ax + By = b$$

gilt

$$y = B^{-1}b - B^{-1}Ax\,.$$

Wir fragen nun, wann lassen sich n nichtlineare Gleichungen in $n + m$ Variablen auflösen?

Satz über implizite Funktionen.
$D \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $(\vec{x}, \vec{y}) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Es gäbe ein $(\vec{a}, \vec{b}) \in D$ mit $f(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Ist in diesem Punkt $(\vec{a}, \vec{b})$

$$\left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right| \neq 0\,,$$

dann gibt es eine Umgebung U von $\vec{a}$ im $\mathbb{R}^m$ und eine Umgebung V von $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^n$, so dass die Gleichung

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

für jedes $\vec{x} \in U$ eine Lösung $\vec{y} = g(\vec{x})$ in V besitzt. Die Funktion $g : U \to V$ ist stetig partiell differenzierbar. Im Falle $m = n = 1$ gilt

$$g'(x) = -\frac{f_x}{f_y}$$

Beispiel.
Für den Einheitskreis $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ gilt

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2y\,.$$

D.h. die Gleichung $f(x, y) = 0$ besitzt eine lokale, eindeutige Auflösung nach y in allen Punkten (x, y) mit $y \neq 0$:

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{falls } y > 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

In $U(1, 0)$ gibt es keine eindeutige Auflösung.

14.7 Extrema mit Nebenbedingungen

Um globale Extrema von $f(\vec{x})$ zu bestimmen, muß die Funktion $f(x)$ auch am Rand untersucht werden. Oft kann der Rand des Definitionsbereichs durch eine oder mehrere Gleichungen der Form $g(\vec{x}) = 0$ beschrieben werden. Dies führt auf die Extremwertaufgabe

$$\text{maximiere (minimiere) } f(\vec{x}) \text{ unter } g(\vec{x}) = 0 \tag{14.1}$$

Zur Lösung von Aufgabenstellung (14.1) gibt es drei Möglichkeiten:

- Man löst $g(\vec{x})$ nach einer Variablen auf und substituiert sie in $f(\vec{x})$
- Man parametrisiert $g(\vec{x})$ und setzt $\vec{x}(t)$ in die Zielfunktion $f(\vec{x}(t))$ ein
- Man verwendet die Lagrange'sche Multiplikatorenregel

Satz 14.17. (Lagrange'scher Multiplikator)

Die Funktionen $f(\vec{x})$ und $g(\vec{x})$ seien stetig partiell differenzierbar. Der Punkt $\vec{a}$ sei eine Lösung der Extremwertaufgabe

$$\max\ (\min)\ f(\vec{x}) \text{ unter } g(\vec{x}) = 0$$

mit $\operatorname{grad} g(\vec{a}) \neq 0$. Dann existiert eine Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}) + \lambda_0 \operatorname{grad} g(\vec{a}) = 0\,.$$

λ_0 heißt *Lagrange'scher Parameter.*

Vorgangsweise zur Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung:

1. Lagrangefunktione $L(\vec{x}, \lambda)$ aufstellen.
2. Partielle Ableitungen der Lagrangefunktion gleich 0 setzen und (nichtlineares) Gleichungssystem lösen.

Beispiel.
Gesucht ist das größte Volumen eines achsenparallelen Quaders, der dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

eingeschrieben werden kann.
Die Lagrangefunktion lautet:

$$L(x, y, z, \lambda) := 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

Aus $L_x = L_y = L_z = L_\lambda = 0$ folgt

$$4xyz = -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{y^2}{b^2} = -\frac{z^2}{c^2}\,.$$

Da $\lambda = 0$ auf ein Volumen 0 führt, können wir annehmen, dass $\lambda \neq 0$ ist. Dann ist

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

also

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}},\; y = \frac{b}{\sqrt{3}} \;\text{ und }\; z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Satz 14.18.
Sind $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung $U(\vec{x}_0)$ des Punktes $\vec{x}_0 \in D$ stetig partiell differenzierbar und ist $\vec{x}_0$ eine Optimallösung von

$$\max\,(\min)\, f(\vec{x}) \text{ unter } g(\vec{x}) = 0$$

mit

$$\operatorname{rang} J_g(\vec{x}_0) = m\,,$$

dann gibt es m reelle Zahlen λ_1, λ_2, …, λ_m mit

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(\vec{x}_0) = 0$$

Achtung: Die Bedingung

$$\operatorname{rang} J_g(\vec{x}_0) = m$$

ist wesentlich, sonst läßt sich das Gleichungssystem aus den partiellen ersten Ableitungen gleich 0 gesetzt nicht lösen.

14.8 Vektorfelder: Divergenz und Rotation

Sei $\vec{c} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetig partiell differenzierbaren Koordinatenfunktionen.

Definition 14.10.
Die *Divergenz* von $\vec{v}$ lautet:

$$\operatorname{div} \vec{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad \text{„Quelldichte von } \vec{v}\text{“}$$

Die *Rotation* (der *Rotor*) von $\vec{v}$ lautet:

$$\operatorname{rot}\vec{v} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{„Wirbeldichte von } \vec{v}\text{“}$$

Formal gilt mit $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{v} &= \langle \nabla, \vec{v} \rangle \\ \operatorname{rot}\vec{v} &= \nabla \times \vec{v} \qquad \text{(äußeres Produkt)} \end{aligned}$$

Beispiel.
Zentrales Kraftfeld $\vec{K}$ (Gravitationsfeld, Coulombfeld):

$$\operatorname{div}\vec{K} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\vec{K} = 0$$

Rechenregeln:

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$ (Das Feld der Rotation ist quellenfrei.)
- $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ „Laplace-Operator“
- $\operatorname{div}(f\vec{v}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{v} \rangle + f \cdot \operatorname{div}\vec{v}$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ (komponentenweise für v_1, v_2, v_3!)

Beispiel. (Maxwell'sche Gleichungen)
$\vec{E}(\vec{x}, t) \ldots$ elektrische Feldstärke in $\vec{x}$ zum Zeitpunkt t
$\vec{H}(\vec{x}, t) \ldots$ magnetische Feldstärke in $\vec{x}$ zum Zeitpunkt t
$\mu_0 \ldots$ Permeabilitätskonstante
$\varepsilon_0 \ldots$ Dielektrizitätskonstante
$c_0 \ldots$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
Aus den *Maxwell'schen Gleichungen* (im Vakuum)

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot}\vec{E} \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\vec{H} \\ \operatorname{div}\vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

folgen die Gleichungen für elektromagnetische Wellen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= c_0^2\, \Delta\vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= c_0^2\, \Delta\vec{H} \end{aligned}$$

Kapitel 15

Kurvenintegrale, exakte Differentialformen

15.1 Das Riemann-Stieltjes Integral

Ist $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), dann streben die *Riemann'schen Summen*

$$R(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

einer auf $[a, b]$ integrablen Funktion f bei einer stetigen Verfeinerung der Zerlegung gegen

$$\int_a^b f(t)\, dt.$$

Stieltjes ersetzt nun die Funktion $g(t) := t$ in den Riemann'schen Summen durch eine beliebige (meist monotone) Funktion und definiert die *Riemann-Stieltjes Summen*

$$RS(f, Z, dg) := \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

f heißt *Integrand*, die Funktion g heißt *Integrator*. Existiert bei einer stetigen Verfeinerung der Zerlegung Z der Grenzwert

$$\lim_{Z} RS(f, Z, dg) =: \int_a^b f\, dg,$$

so nennt man den Grenzwert *Riemann-Stieltjes Integral*.

Beispiel.
Ist $H(t)$ die Heaviside Funktion

$$H(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

und f eine in 0 rechtsseitig stetige Funktion, dann ist für $0 \in [a, b]$:

$$\int_a^b f\, dH = f(0).$$

Abbildung 15.1: Thomas Stieltjes (niederländischer Mathematiker, 1856-1894)

Das Riemann-Stieltjes Integral ist linear:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\, dg = \lambda_1 \int_a^b f_1\, dg + \lambda_2 \int_a^b f_2\, dg$$
$$\int_a^b f\, d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \int_a^b f\, dg_1 + \lambda_2 \int_a^b f\, dg_2$$

Satz 15.1. (Partielle Integration)
Mit $\int_a^b f\, dg$ existiert auch $\int_a^b g\, df$ und es gilt

$$\int_a^b f\, dg + \int_a^b g\, df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Satz 15.2.
Ist f integrabel und g stetig differenzierbar in (a, b), dann existiert $\int_a^b f\, dg$ und es gilt

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f g'\, dt$$

15.2 Kurvenintegrale

Es sei $I = [a, b]$ und $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer stückweise glatten Kurve mit der Bogenlänge $s(t)$. $\mathcal{C} := \{\vec{x}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ sei die Menge der Kurvenpunkte. Auf $\mathcal{C}$ sei eine reellwertige Funktion f definiert.

Definition 15.1.
Das *Kurvenintegral* von f ist definiert als

$$\int_{\mathcal{C}} f(\vec{x})\,ds := \int_a^b f(\vec{x}(t))\,ds(t)$$

Da $ds = \|\dot{\vec{x}}\|\,dt$, gilt

$$\int_{\mathcal{C}} f(\vec{x})\,ds = \int_a^b f(\vec{x}(t))\|\dot{\vec{x}}\|\,dt$$

Anwendungen:

- Masse bzw. Schwerpunkt von gekrümmten Stäben
- Trägheitsmoment einer mit Masse belegten Kurve

Eigenschaften von Kurvenintegralen:
$L(\mathcal{C})$ sei die Länge der Kurve. Dann gilt:

1. $\left|\int_{\mathcal{C}} f(\vec{x})\,ds\right| \le \sup_{\vec{x}\in\mathcal{C}} |f(\vec{x})| \cdot L(\mathcal{C})$
2. Linearität: $\int_{\mathcal{C}} (\lambda f(\vec{x}) + \mu g(\vec{x}))\,ds = \lambda \int_{\mathcal{C}} f(\vec{x})\,ds + \mu \int_{\mathcal{C}} g(\vec{x})\,ds$
3. Ist $\mathcal{C}$ die Kurve $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, so gilt:
$$\int_{\mathcal{C}} f(\vec{x})\,ds = \int_{\mathcal{C}_1} f(\vec{x})\,ds + \int_{\mathcal{C}_2} f(\vec{x})\,ds$$

15.3 Wegintegrale, Stammfunktionen, exakte Differentialform

Motivation: Welche Arbeit wird geleistet, wenn ein Massenpunkt in einem Kraftfeld $\vec{K}$ auf einer Strecke von P nach Q verschoben wird? (Siehe Abbildung 15.2)
Wird nun der Massenpunkt auf einer stückweise glatten Kurve $\mathcal{C}$ verschoben, so ist $\langle \vec{K}(\vec{x}), \vec{x}' \rangle$ die Kraft, die in $\vec{x}(s)$ tangential zur Bahn $\mathcal{C}$ wirkt.

Dies führt auf folgende Definition:

Definition 15.2.
Im Vektorfeld $\vec{K}$ im $\mathbb{R}^3$ sei eine stückweise glatte Kurve $\vec{x}(t)$, $a \le t \le b$, gegeben. Das *Weg-* oder *Arbeitsintegral* ist gegeben durch

$$W = \int_{\mathcal{C}} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle := \int_a^b K_1(\vec{x}(t))\,dx_1(t) + \int_a^b K_2(\vec{x}(t))\,dx_2(t) + \int_a^b K_3(\vec{x}(t))\,dx_3(t)$$

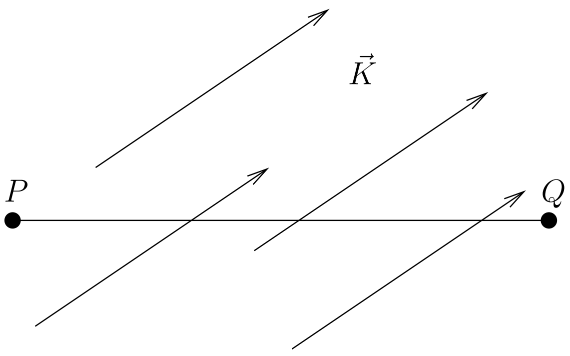


Abbildung 15.2: Arbeit $W = \langle \vec{K}, \vec{Q} - \vec{P} \rangle$

Beispiel.
$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2y \\ x-y \\ xyz \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}$ ist eine Parabel in der Ebene $z = 2$ der Form $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle = \int_0^1 x^2(t)y(t)\,dt + \int_0^1 (x(t) - y(t))2t\,dt + \int_0^1 x(t)y(t)z(t) \cdot 0\,dt = \frac{11}{30}$$

Der Wert eines Wegintegrals hängt i.a. vom Integrationsweg ab.

Beispiel. (Fortsetzung)
Geht man im obigen Beispiel auf einer Geraden von $\vec{x}(0)$ nach $\vec{x}(1)$, so erhält man den Wert $\frac{1}{4}$ $(\neq \frac{11}{30})$.

Wegintegrale sind linear und für $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle = \int_{\mathcal{C}_1} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle + \int_{\mathcal{C}_2} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle$$

Wird eine Kurve $\mathcal{C}$ in umgekehrter Richtung $(-\mathcal{C})$ durchlaufen, so erhält man

$$\int_{-\mathcal{C}} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle = -\int_{\mathcal{C}} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle$$

Das Integral über eine *geschlossene* Kurve $\mathcal{C}$ wird mit

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle$$

bezeichnet.

Definition 15.3.
$\int_{\mathcal{C}} \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle$ heißt *wegunabhängig*, wenn das Integral über jede stückweise glatte Kurve im Vektorfeld $\vec{v}$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt den gleichen Wert ergibt.

Lemma 15.3.
$\int_{\mathcal{C}} \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle$ ist genau dann wegunabhängig, wenn für jede geschlossene Kurve gilt

$$\oint \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle = 0.$$

Die Wegunabhängigkeit von Integralen hängt mit der Existenz einer Stammfunktion für das Vektorfeld $\vec{v}$ zusammen.

Definition 15.4.
$D \subseteq \mathbb{R}^3$ sei offen. $U : D \to \mathbb{R}$ ist *Stammfunktion* des Vektorfeldes $\vec{v}$, wenn gilt

$$\vec{v} = \operatorname{grad} U.$$

Definition 15.5.
Ist $\vec{v}$ das Gradientenfeld von U, so heißt die Differentialform $v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz$ *exakt*.

Definition 15.6.
Eine Menge D heißt *zusammenhängend*, wenn sich je 2 beliebige Punkte in D durch einen Kurve in D verbinden lassen.

Satz 15.4.
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene, zusammenhängende Menge und $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Das Integral $\int_{\mathcal{C}} \langle \vec{F}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle$ ist genau dann in D wegunabhängig, wenn $\vec{F}$ eine Stammfunktion U besitzt. In diesem Fall gilt

$$\int_A^B \langle \vec{F}(\vec{x}), d\vec{x} \rangle = U(B) - U(A).$$

Beispiel.
Ist $\vec{K}$ ein Kraftfeld und U die zugehörige Stammfunktion, so bezeichnet man $-U$ als *Potential* der Kraft U. Besitzt $\vec{K}$ ein Potential, so wird $\vec{K}$ als *konservative Kraft* bezeichnet, da in diesem Fall der Satz von der Erhaltung der Energie gilt.

Die Stammfunktion U einer exakten Differentialform $F(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,x)dz$ läßt sich folgenderweise berechnen. Ansatz: $U = \int f(x,y,z)dx + \phi(y,z)$. Nach Ausführung dieser Integration wird U partiell nach y differenziert und aus $U_y = g(x,y,z)$ ergibt sich eine Gleichung zur bestimmung von $\phi(x,y,z)$. Dann wird nach dy integriert, partiell nach z differenziert und $U_z = h(x,y,z)$ gesetzt. Dann kann man durch nochmalige Integration nach dz die unbekannte Funktion $\phi(x,y,z)$ vollständig bestimmen.

Satz 15.5.
Ist $\vec{F}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und ist $\langle \vec{F}, d\vec{x} \rangle$ exakt, so gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

$\Rightarrow$ *„Integrabilitätsbedingungen"* für $\vec{F} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{15.1}$$

Die Umkehrung des Satzes 15.5 ist nur für einfach zusammenhängende Gebiete richtig. Eine Menge D heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sich jede geschlossene Kurve in D *stetig* auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Satz 15.6.
Ist D einfach zusammenhängend und erfüllt $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ die Integrabilitätsbedingungen (15.1), dann ist $\langle \vec{F}, d\vec{x} \rangle$ exakt, also jedes Wegintegral über $\vec{F}$ wegunabhängig.

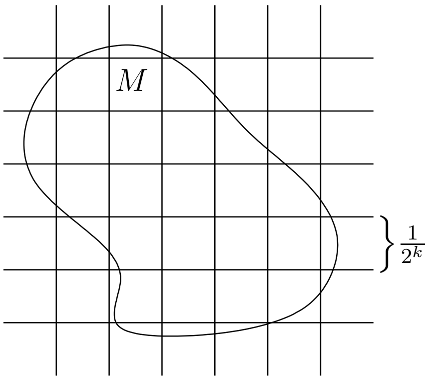
Kapitel 16

Mehrfache Integrale

16.1 Flächeninhalt einer Menge

$M \subseteq \mathbb{R}^2$ sei eine beliebige beschränkte Menge. Wir überdecken M durch ein Gitter, dessen Linien den Abstand $\frac{1}{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ voneinander haben.

$s_k(M) :=$ Flächeninhalt aller Quadrate, die ganz in M liegen
$S_k(M) :=$ Flächeninhalt aller Quadrate, die mindestens einen Punkt mit M gemeinsam haben.



Es gilt:

$$s_k(M) \leq S_k(M)$$
$$s_k(M) \leq s_{k+1}(M)$$
$$S_k(M) \geq S_{k+1}(M)$$

Daher existieren

$$\lim_{k\to\infty} s_k(M) = F_i \ \ldots \text{innerer Inhalt von } M$$
$$\lim_{k\to\infty} S_k(M) = F_a \ \ldots \text{äußerer Inhalt von } M$$

Gilt $F_i = F_a$, so heißt M *Riemann-meßbar* und $F = F_i$ $(= F_a)$ ist der Flächeninhalt von M.

Beispiel.
Eine nicht Riemann-meßbare Menge ist z.Bsp. $M = \{$alle rationalen Zahlen im Einheitsquadrat$\}$.

Eine Menge M mit $F(M) = 0$ heißt *Nullmenge*. Jede Menge von endlich vielen Punkten im $\mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.

16.2 Integration über ebene Bereiche

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene, Riemann-messbare Menge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Man überdeckt B durch ein rechteckiges Gitter der Breite Δx, Δy. In jenen Rechtecken, die mit B einen nichtleeren Durchschnitt haben, wählt man einen beliebigen Punkt $(x_i, y_j) \in B$.

Riemann'sche Summe:

$$R(f, Z) := \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \, \Delta y_j$$

Hat für jede Folge von Zerlegungen Δx_i, Δy_j mit $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_j \to 0$ und für jede Wahl der Punkte (x_i, y_j) der Grenzwert der Riemann'schen Summen den gleichen Wert, so bezeichnet man den Grenzwert als Doppelintegral von f über B:

$$\iint\limits_B f(x, y)\, dx\, dy := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} R(f, Z)$$

Ist $f(x, y) \equiv 1$ auf B, so ist $\iint\limits_B f(x, y)\, dx\, dy$ der Flächeninhalt von B.

Ist $f(x, y) \geq 0$ auf B, so ist $\iint\limits_B f(x, y)\, dx\, dy$ das Volumen des Körpers K mit

$$K := \{(x, y, z) \mid (x, y) \in B,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Rechenregeln:

1. Das Doppelintegral ist linear:

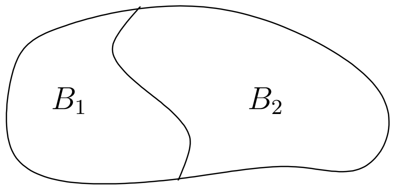
$$\iint\limits_B (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y))\, dx\, dy = \lambda \iint\limits_B f(x, y)\, dx\, dy + \mu \iint\limits_B g(x, y)\, dx\, dy$$

2. Das Doppelintegral ist monoton auf B: Gilt für die integrablen Funktionen f und g: $f(x,y) \leq g(x,y)$ für $(x,y) \in B$, so gilt auch

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_B g(x,y)\,dx\,dy$$

3. Das Doppelintegral ist additiv. Haben die Riemann-messbaren Mengen B_1 und B_2 höchstens Randpunkte gemeinsam und ist $B_1 \cup B_2 = B$, dann gilt

$$\iint\limits_{B_1 \cup B_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy$$



4. *Mittelwertsatz*: Ist B zusammenhängend und $f: B \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $(x^*, y^*) \in B$ mit

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = f(x^*,y^*) \iint\limits_B dx\,dy = f(x^*,y^*) \cdot \text{Fläche}(B)$$

Eine Menge $B = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$ nennt man einen *Normalbereich vom Typ 1*, eine Menge $B = \{(x,y) \mid l(y) \leq x \leq r(y),\ c \leq y \leq d\}$ heißt *Normalbereich vom Typ 2.*

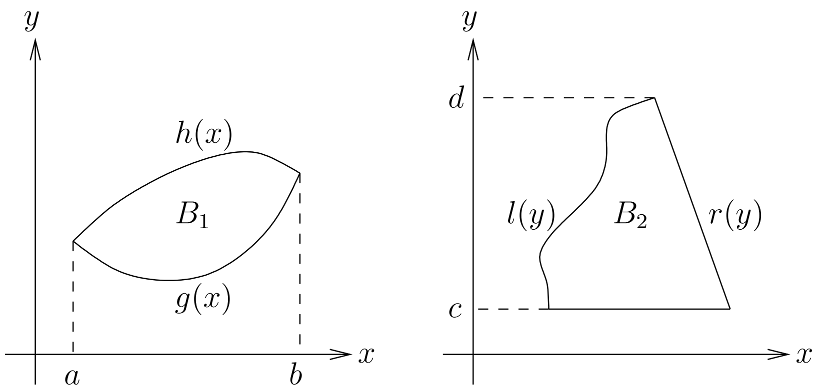


Abbildung 16.1: B_1 ist ein Normalbereich vom Typ 1, B_2 vom Typ 2

Ist B ein Normalbereich vom Typ 1, so berechnet man das Doppelintegral durch zweimalige Integration:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Analog für Normalbereiche vom Typ 2:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

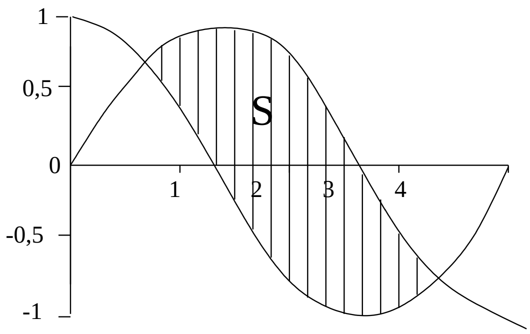
Im allgemeinen Fall zerlegt man B in Normalbereiche.

Satz 16.1. (Fubini)
Ist $B = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Abbildung 16.2: Guido Fubini (1879 - 1943)

Beispiel.
Gesucht ist die Fläche, die zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$ von der Sinus- und Cosinuskurve eingeschlossen wird.
$\Rightarrow S = \{(x,y) \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4},\ \cos x \leq y \leq \sin x\}$.



$$F = \int_{x=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_{y=\cos x}^{\sin x} dy \right) dx = \int_{x=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = -\cos x - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

16.3 Mehrfache Integrale, Transformationsformeln

Dreifache und mehrfache Integrale werden in der gleichen Weise durch Riemann'sche Summen wie Doppelintegrale eingeführt. Es gelten für sie die gleichen Eigenschaften.

Beispiel.
Der Trägheitsmoment eines Einheitswürfels

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

bei Drehung um die z-Achse:

$$J_z = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{2}{3}.$$

Oftmals möchte man bei Anwendungen keine kartesischen Koordinaten, sondern ein anderes Koordinatensystem verwenden. In der linearen Algebra wurde gezeigt, dass die Anwendung einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das Volumen des Einheitswürfels zu $|\det A|$ ändert. Beim Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten ändert sich somit das Volumen von

$$\Delta x \cdot \Delta y \text{ um } |J_f|\, r\, \Delta r \Delta\varphi$$

wobei J_f die Jacobimatrix von

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = f_1(r, \varphi) \\ y &= r\sin\varphi = f_2(r, \varphi) \end{aligned}$$

ist. Da

$$|J_f| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

ist das Flächenelement in Polarkoordinaten

$$r\, dr\, d\varphi.$$

Im Raum gilt: Ist

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w), \end{aligned}$$

so gilt

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dz.$$

Dabei ist S das Bild von B nach der Transformation von (x, y, z) auf (u, v, w).

Das Volumselement dV in Zylinderkoordinaten lautet daher

$$dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

und in Kugelkoordinaten

$$dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta.$$

Beispiele.

1. Gesucht sei die Fläche einer Ellipse

$$x = ar\cos\varphi$$
$$y = br\sin\varphi$$

$\Rightarrow B = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Dadurch ergibt sich nach Variablentransformation die Determinante der Jacobimatrix

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$

und als neuer Integrationsbereich

$$S = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Somit erhält man

$$\text{Fläche (Ellipse)} = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\cdot abr\,dr\,d\varphi = ab\pi$$

2. Gesucht sei der Trägheitsmoment I_z eines Kugelausschnittes bei Rotation um die z-Achse. Wir führen dazu Kugelkoordinaten ein und erhalten

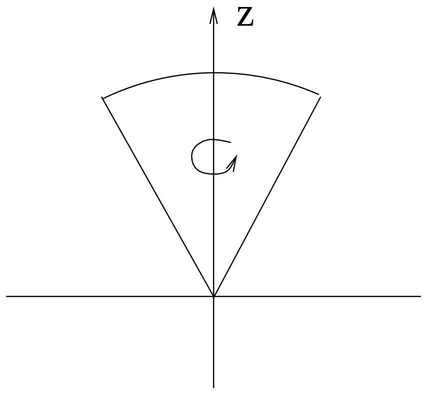


Abbildung 16.3: Kugelausschnitt

$$S = \left\{(r,\varphi,\vartheta) \mid 0 \leq r \leq a,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Damit ergibt sich der Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} (x^2+y^2)\cdot r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta \\ &= \int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} r^4\sin^3\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta \\ &= \frac{2\pi}{15}a^5\left(2-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right). \end{aligned}$$

Guldin'sche Regeln:

(schon Pappos von Alexandria um 300 n.Chr. bekannt, benannt nach Habakuk (Paul) Guldin, Graz, 1577-1643)

- *Erste Guldin'sche Regel:* Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Flächeninhalt der erzeugten Punktmenge mal dem Weg des Flächenschwerpunktes.
- *Zweite Guldin'sche Regel:* Die Oberfläche ist gleich der Länge des erzeugenden Kurvenstücks mal dem Weg des Schwerpunktes dieses Kurvenstücks.

Abbildung 16.4: Habakuk (Paul) Guldin

Beispiel.
Gesucht ist das Volumen und die Oberfläche eines Torus.

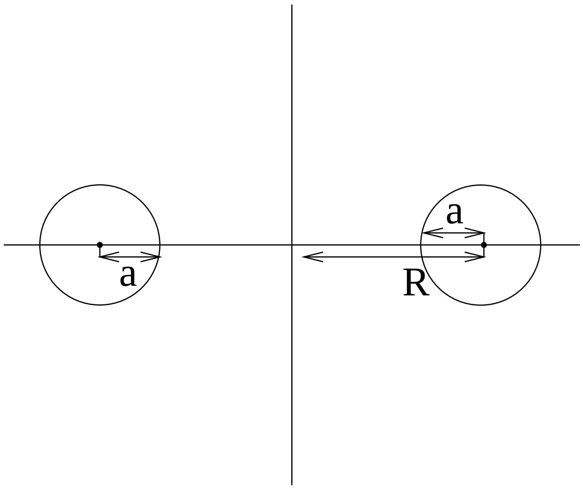


Abbildung 16.5: Torus

- Fläche vom Kreis: $a^2\pi$
  Weg des Schwerpunktes: $2R\pi$
  Daher ist das Volumen $2a^2R\pi^2$
- Kurvenlänge: $2a\pi$
  Weg des Schwerpunktes: $2R\pi$
  Daher erhält man für die Oberfläche: $4aR\pi^2$

16.4 Der Green'sche Satz in der Ebene

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $\vec{v} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der Bereich B liege in D und werde von einer stückweise glatten Kurve $\mathcal{C}$ berandet. Dabei ist $\mathcal{C}$ so orientiert, dass das (nichtleere!) Innere von B zur Linken von $\mathcal{C}$ liegt. Dann gilt

Satz 16.2. (Green'scher Satz in der Ebene)

$$\iint\limits_B (g_x - f_y)\,dx\,dy = \int\limits_{\mathcal{C}} (f\,dx + g\,dy)$$

Anwendungen:

1. Flächenberechnung:

$$\text{Fläche } (B) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{C}} (f\,dx + g\,dy)$$

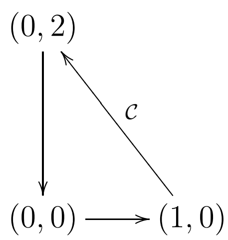
   Ist $\mathcal{C}$ durch $r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, gegeben, so erhält man

$$\text{Fläche } (B) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi$$

   Beispielsweise erhält man somit für die Kardioide $r = a(1 - \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi = \frac{3a^2\pi}{2}$$

2. Berechnung von Kurvenintegralen:
   Bsp.: Soll $\int\limits_{\mathcal{C}} (4x^2 + y)\,dx + 3y^2\,dy$ entlang der Kurve $\mathcal{C}$:



   berechnet werden, so ist wegen $f = (4x^2 + y)$, $g = 3y^2$:

$$f_y = 1, \quad g_x = 0,$$

   also

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (4x^2 + y)\,dx + 3y^2\,dy = \iint\limits_B (0 - 1)\,dx\,dy = -1 \cdot \text{Fläche} = -1$$

3. Ist das Vektorfeld $\vec{v}$ zweimal stetig differenzierbar und $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve mit Normalenvektor $\vec{n}$, so gilt für die Richtungsableitung von $\vec{v}$ nach $\vec{n}$, $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}} = \langle \operatorname{grad} \vec{v}, \vec{n} \rangle$:

$$\iint\limits_{B} \Delta v \, dx \, dy = \int\limits_{C} \langle \operatorname{grad} \vec{v}, \vec{n} \rangle$$

Kapitel 17

Oberflächenintegrale, die Sätze von Stokes und Gauß

17.1 Flächen im Raum

Eine Fläche im Raum wird analog zu Kurven durch zwei Parameter u und v beschrieben, also

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Für eine *glatte Fläche* fordert man, dass $\vec{x}$ stetige erste partielle Ableitungen $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ besitzt, die linear unabhängig sein sollen (sie sollen ja eine Ebene, die *Tangentialebene*, aufspannen), also

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq 0.$$

Die Tangentialebene im Flächenpunkt $\vec{x}_0 = \vec{x}(u_0, v_0)$ ist dann gegeben durch

$$\vec{x}_0 + \lambda \vec{x}_u(u_0, v_0) + \mu \vec{x}_v(u_0, v_0).$$

Der *Rand* eines Flächenstücks S wird mit ∂S bezeichnet. Der Rand einer geschlossenen Fläche S (z.Bsp. einer Kugel) ist $\partial S = \emptyset$.
Ein *Flächenelement* entspricht einem Parallelogramm in der Tangentialebene mit den Seitenlängen $\vec{x}_u\,\Delta u$ und $\vec{x}_v\,\Delta v$. Sein Flächeninhalt ist somit

$$\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|\,\Delta u\,\Delta v = \sqrt{\|\vec{x}_u\|^2 \|\vec{x}_v\|^2 - \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v\rangle^2}$$

Die Größen

$$\begin{aligned} E &:= \|\vec{x}_u\|^2 = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u\rangle \\ F &:= \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v\rangle \\ G &:= \|\vec{x}_v\|^2 = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v\rangle \end{aligned}$$

werden als *metrische Fundamentalgrößen* bezeichnet. Somit erhält man als Oberflächenelement dO:

$$dO = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

Speziell für Drehflächen gilt:

$$\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} x(t)\cos\varphi \\ x(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$
$$dO = |x(t)|\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\,dt\,d\varphi$$

Für Flächen der Form $z = h(x,y)$ erhält man

$$dO = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}\,dx\,dy$$

17.2 Skalare Oberflächenintegrale

Ist f eine stetige Funktion $S \to \mathbb{R}$ auf der Fläche

$$S = \{\vec{x}(u,v) \mid (u,v) \in R\},$$

so gilt

$$\iint\limits_S f(\vec{x})\,dO = \iint\limits_R f(\vec{x}(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Somit erhält man für Drehflächen

$$\iint\limits_S f(\vec{x})\,dO = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_t f(\vec{x}(t,\varphi))|x(t)|\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\,dt \right) d\varphi$$

Oberflächenintegrale sind wieder linear und haben die gleichen Eigenschaften (Monotonie, ...) wie Kurvenintegrale.

Beispiel.
Auf der Fläche $z = xy$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, ist die Masse gemäß der Dichtefunktion $\varrho(x,y,z) = xy$ verteilt. Wie groß ist die Gesamtmasse der Fläche?

$$\iint\limits_S \varrho\,dO = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dy\,dx = \frac{1}{15}(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{7}{2}} + 1)$$

17.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes, der Satz von Stokes

Definition 17.1.
Ist S eine glatte Fläche, $\vec{n}_0$ ihr normierter Normalenvektor und $\vec{v}$ ein auf S stetiges Vektorfeld, dann heißt

$$\iint\limits_S \langle \vec{v}, d\vec{O} \rangle := \iint\limits_R \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle \, dO \tag{17.1}$$

der *Fluß von $\vec{v}$ durch S.*
Das Symbol

$$d\vec{O} := \vec{n}_0 \, dO = (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \, du \, dv$$

heißt *vektorielles Flächenelement.*

Mit $dO = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \, du \, dv$ wird die rechte Seite in (17.1) zu

$$\left\langle \vec{v}, \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} \right\rangle \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \, du \, dv = \langle \vec{v}, \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle \, du \, dv,$$

wobei $\langle \vec{v}, \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle$ das Spatprodukt der Vektoren $\vec{v}$, $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ ist. Also gilt

$$\iint\limits_S \langle \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \iint\limits_R \langle \vec{v}, \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle \, du \, dv.$$

Beispiel.
Der Fluß einer Punktladung durch eine Kugelschale:

Punktladung $\vec{E} = c\frac{q}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x}$, Kugel mit Radius a.

Für die Kugel gilt $\vec{n}_0 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ mit $\|\vec{x}\| = a$. Daher ist $\langle \vec{E}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{cq}{a^2}$ und

$$\iint\limits_S \langle \vec{E}, d\vec{O} \rangle = \frac{cq}{a^2} \iint\limits_S dO = 4cq\pi.$$

Definition 17.2.
Eine stückweise glatte Fläche heißt *zweiseitig* (*orientierbar*), wenn der Normalenvektor bei Verschiebung entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve auf der Fläche stets in sich zurückkehrt.

Beispiel.
Eine nicht orientierbare Fläche ist das *Möbius'sche Band*:

$$\vec{x}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} (2 + t\cos\varphi)\cos 2\varphi \\ (2 + t\cos\varphi)\sin 2\varphi \\ t\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1, \; 0 \le \varphi < 2\pi$$

Diese Fläche ist nicht orientierbar, denn $\vec{x}(0, 0) = \vec{x}(0, \pi)$, aber $\vec{n}(0, 0) = -\vec{n}(0, \pi)$.

Satz 17.1. (Satz von Stokes)
Es sei S eine stückweise glatte, orientierbare Fläche, deren Rand eine stückweise glatte Kurve $\mathcal{C}$ sei. Der normierte Normalenvektor $\vec{n}_0$ von S sei so gewählt, dass die drei Vektoren

1. $\vec{n}_0$
2. der Tangentenvektor von $\mathcal{C}$
3. der Vektor, der von $\mathcal{C}$ ins Innere der Fläche zeigt

eine Rechtssystem bilden. Ferner sei $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einem Bereich $D \supseteq S$. Dann gilt

$$\iint\limits_S \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle \, dO = \int\limits_{\mathcal{C}} \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle$$

Abbildung 17.1: George Gabriel Stokes (1819 - 1903)

Der Stokes'sche Satz ermöglicht es, Oberflächenintegrale durch Kurvenintegrale zu berechnen bzw. umgekehrt.

Beispiel.
$\vec{v} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ y + 5z \\ x + y + z \end{pmatrix}$. Die Fläche S ist die nördliche Halbkugel der Einheitskugel.

Die berandende Kurve $\mathcal{C}$ ist der Einheitskreis. Der Fluß von $\operatorname{rot} \vec{v}$ durch S ist

$$\iint\limits_S \langle \operatorname{rot} \vec{v}, d\vec{O} \rangle = \int\limits_{\mathcal{C}} \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 3 \sin^2 \varphi \, d\varphi = 3\pi$$

Folgerungen aus dem Stokes'schen Satz:

1. Green'scher Satz in der Ebene. S ist eine Fläche in der Ebene, die von $\mathcal{C}$ berandet wird.
2. Integrabilitätsbedingungen sind hinreichend für die Exaktheit einer Differentialform in einem einfach zusammenhängenden Bereich.

17.4 Der Divergenzsatz von Gauß

Der Divergenzsatz von Gauß verknüpft Oberflächenintegrale mit Integralen über räumliche Bereiche.
Ein *regulärer räumlicher Bereich* T ist abgeschlossen, hat ein nicht leeres, beschränktes Innere und seine Oberfläche ∂T besteht aus endlich vielen glatten Flächenstücken.
$\vec{v}$ sei ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld in einem offenen Gebiet D, das den Bereich T enthält. Der normierte Normalenvekter $\vec{n}_0$ der Oberfläche von T weise nach aussen. Dann gilt

Satz 17.2. (Divergenzsatz von Gauß)

$$\iiint\limits_T \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \iint\limits_{\partial T} \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle \, dO$$

Der Divergenzsatz besitzt wichtige Anwendungen in Physik und Technik, wie etwa eine koordinatenfreie Definition der Divergenz. Mit seiner Hilfe erhält man die Kontinuitätsgleichung der Hydromechanik

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

und die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \, \Delta u.$$