Algorithmische Graphentheorie SS 2009

6. Übungsblatt

41. Zeigen Sie, dass die Identifikation zweier knotendisjunkten perfekten Graphen in einer Clique, d.h. die Identifikation der Knoten zweier gleichgroßer Cliquen in den beiden einzelnen Graphen, einen perfekten Graphen ergibt.

42. Zeigen Sie: Die Kanten eines dreiecksfreien Graphen tragen die Helly-Eigenschaft: wenn immer sich eine Menge von Kanten paarweise schneidet, so enthält auch schon der Schnitt über alle diese Kanten einen Knoten.

43. Zeigen Sie: Für bipartite Graphen und für Linegraphen bipartiter Graphen können die chromatische Zahl $\chi(G)$, die Clique-Zahl $\omega(G)$, die Stabilitätszahl $\alpha(G)$ und die Clique-Partitioning-Zahl $\theta(G)$ in polynomieller Zeit bestimmt werden.

44. Sei σ ein *perfektes Knoteneliminationsschema (PES)* für den *chordalen* Graphen G (vgl. Vorlesung). Der Greedy Algorithmus bzgl. der Anordnung $(\sigma^{-1}(n), \dots, \sigma^{-1}(1))$ konstruiert eine optimale zulässige Knotenfärbung von G.

45. Eine *topologische Sortierung* der Knoten eines gerichteten Graphen $G = (V, A)$ ist eine Bijektion $\sigma\colon V \to \{1, 2, \dots, n\}$, sodass $(u, v) \in A \Rightarrow \sigma(u) < \sigma(v)$. Zeigen Sie:

    (a) Ein gerichteter Graph besitzt eine topologische Sortierung der Knoten genau dann, wenn er azyklisch ist.

    (b) Ein gerichteter Graph ist azyklisch genau dann, wenn eine gerichtete Tiefensuche (die in jedem Knoten nur die ausgehenden Kanten berücksichtigt) in G keine Rückwärtskanten (sondern höchstens Querkanten) liefert.

    (c) Sei $G = (V, A)$ ein azyklischer Digraph. Die folgende Version der gerichteten Tiefensuche produziert eine topologische Sortierung der Knoten von G in linearer Zeit: Erhöhe t und setzte DFSnum[v] nicht am Beginn der Prozedur TIEFENSUCHE (vgl. Vorlesung), sondern am Ende (nach der `FOR`-Schleife); rufe im Hauptprogramm TIEFENSUCHE(G, v) für alle bisher noch nicht besuchten Knoten auf, d.h. für alle Knoten $v \in V$ mit $DFSnum[v] = 0$. Dann ist $\sigma(v) := n + 1 - DFSnum[v]$ eine topologische Sortierung der Knoten von G.

    (d) Sei ein *Vergleichsbarkeitsgraph* G mit einer *transitiven Orientierung* auf E gegeben (vgl. Vorlesung). Der Greedy Algorithmus angewandt auf eine Anordnung $DFSnum^{-1}(1), \dots, DFSnum^{-1}(n)$ der Knoten von G, wie sie die gerichtete Tiefensuche aus Punkt (c) liefert, färbt die Knoten von G zulässig und optimal. Durch eine leichte Modifikation dieses Algorithmus findet man eine maximum Clique in G in linearer Zeit.

46. Das Komplement eines *Intervallgraphen* (vgl. Vorlesung) ist ein *Vergleichbarkeitsgraph*.

47. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und $H = G \circ h$ der Graph, der aus der *Multiplikation* der Knoten von G mit dem Vektor $(h_1, h_2, \dots, h_n)$, $h_i \in \mathbb{Z}^+$, für $1 \le i \le n$, entsteht. Zeigen Sie, dass es ein $s \in \mathbb{Z}^+$ und die Vektoren $h^{(i)}$, $0 \le i \le s$ existieren, sodass $H = G \circ h^{(0)} \circ h^{(1)} \circ \dots \circ h^{(s)}$ gilt, und die Vektoren $H^{(i)}$ folgende eigenschaften haben:

    (a) $h^{(0)} \in (\mathbb{Z}^+)^n$ und $h_i^{(0)} = 0$ falls $h_i = 0$ und $h_i^{(0)} = 1$ falls $h_i > 0$.

    (b) $h_i \in (\mathbb{Z}^+)^{m_i}$ mit $m_i = |V(G \circ h^{(0)} \circ \dots h^{(i-1)}|$, for all $1 \le i \le s$.

    (c) alle Einträge von $h^{(i)}$, $1 \le i \le s$, mit Ausnahme von genau einem Eintrag sind gleich 1, und der Ausnahmeeintrag ist gleich 2.