

Algorithmische Graphentheorie SS 2009

5. Übungsblatt

34. Zeigen Sie: Ein ebener Graph ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn jedes seiner Gebiete durch einen Kreis berandet wird.

35. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$, sodass jeder planare Graph $G = (V, E)$ mindestens $c \cdot n$ Knoten vom Grad höchstens 6 besitzt. Dabei gilt $n = |V|$.
- (b) Ein dreiecksfreier planarer Graph besitzt einen Knoten vom Grad höchstens 3.
- (c) Ob ein (planare) Graph dreiecksfrei ist, lässt sich in Zeit $O(nm)$ ($O(n)$) testen.

36. Beweisen Sie, dass für einen planaren Graphen $G = (V, E)$ der Taillenweite $g := g(G)$ folgende Ungleichung gilt:

$$|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V| - 2)$$

37. Zeigen Sie: Für einen planaren zusammenhängenden Graphen mit Minimalgrad $\delta(G) \geq 3$ (beachte $\delta(G) \leq 5$) gilt:

$$\alpha(G) \leq \frac{2n-4}{\delta(G)}.$$

38. (S. Jurkiewicz, Planar graphs, Hamiltonian cycles and extreme independence numbers, in "Applications of Combinatorial Optimization", Hrsg. C.C. Ribeiro und N. Maculan, *Annals of Operations Research* **50**, 1994, 281–293.)

Sei G ein zusammenhängender, maximal planarer Graph der Ordnung $n > 4$. Zeigen Sie:

- (a) G enthält keine adjazenten Knoten vom Grad jeweils 3.
- (b) G besitzt eine maximum stabile Menge S (d.h. $|S| = \alpha(G)$), die alle Knoten vom Grad 3 enthält.

39. (Wagner 1937, Hall 1943, A.K. Kelmans, A strengthening of the Kuratowski planarity criterion for 3-connected graphs, *Discrete Mathematics* **51**, 1984, 215–220.)

Ein dreifach zusammenhängender Graph $G \neq K_5$ ist planar genau dann, wenn er keine Unterteilung des $K_{3,3}$ enthält.

40. Ein planarer Graph heißt *kreisartig planar* (engl. *outerplanar*), falls er so in die Ebene eingebettet werden kann, dass alle Knoten auf dem Rand genau eines Gebietes liegen - o.B.d.A. des äußeren. Offenbar ist ein G kreisartig planar genau dann, wenn $G * 1$ (d.h. G mit einem zusätzlichen Knoten, der zu allen Knoten von G verbunden wird) planar ist.

Zeigen Sie:

- (a) Ein (kanten-)maximaler kreisartig planarer Graph ist ($n \geq 3$) ist zweifach zusammenhängend.
- (b) Ein zweifach zusammenhängender, kreisartig planarer Graph ist Hamiltonsch.
- (c) (König 1905) Ein kreisartig planarer Graph ist 3-färbbar.
- (d) Ein kreisartig planarer Graph hat höchstens $2n - 3$ Kanten.

(e) (Chartrand, Harary 1967) Ein Graph ist kreisartig planar genau dann, wenn er