Algorithmische Graphentheorie SS 2009

4. Übungsblatt

28. Das drei-Färbbarkeitsproblem lautet: Kann ein gegebener Graph G mit $k \leq 3$ Farben zulässig gefärbt werden, d.h. gilt die Ungleichung $\chi(G) \leq 3$? Entwerfen Sie einen $O(m2^n)$ Algorithmus für das drei-Färbbarkeitsproblem.

29. Zeigen Sie: Die *Saturation-Largest-First* Heuristik (SLF) kann in linearer Laufzeit implementiert werden.

30. Zeigen Sie: Die *Recursive-Largest-First* Heuristik (RLF) kann in Zeit $O(nm)$ implementiert werden und färbt alle bipartiten Graphen optimal.

31. Der *chromatische Index* $\chi'(G)$ eines Graphen G ist die kleinste natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass eine Färbung der Kanten von G mit k Farben gibt, wobei keine zwei inzidente Kanten dieselbe Farbe tragen.

    (a) Zeigen Sie, dass $\chi'(G) = \chi(L(G))$ für jeden Graphen G gilt, wobei $L(G)$ der Linegraph von G ist.

    (b) Der Greedy Färbungsalgorithmus, angewandt auf den Linegraphen $L(G)$, liefert die Schranke $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

    (c) Konstruieren Sie einen Graphen (eine Klasse von Graphen) für den (die) die Schranke aus (b) scharf ist.

    (d) Zeigen Sie: Für $\Delta(G) \geq 3$ gilt $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 2$. Hinweis: Wenden Sie den Satz von Brooks an.

32. Warum funktioniert der in der Vorlesung gegebene Beweis des Satzes von König " Für jeden bipartiten Graphen G gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$." für den Satz von Vizing (vgl. Vorlesung) nicht?

33. Es gibt einen $O(mn)$ -Algorithmus, um die Kanten eines Graphen G mit höchstens $\Delta(G) + 1 \leq \chi'(G) + 1$ viele Farben zu färben.