Algorithmische Graphentheorie SS 2009

3. Übungsblatt

21. Die Smallest-Last-Heuristik

    (a) (Matula,Beck 1983) Die Smallest-Last-Heuristik kann mit Laufzeit $O(n+m)$ implementiert werden.

    (b) Die Smallest-Last-Heuristik färbt alle Wälder optimal.

    (c) Für jede Anordnung $v_1, \ldots, v_n$ eines Graphen G gilt $\max_i d_{G_i}(v_i) \geq m/n$.

22. Der Greedy-Algorithmus "Greedy-Colour" verwendet hochstens $\lceil \sqrt{2m} \rceil$ viele Farben für jede beliebige Knotenanordnung in einem Graphen mit $m \geq 1$ Kanten. (Hinweis: Induktion nach m, entferne eine Farbklasse.)

23. (Largest-first-Heuristik, Welsh, Powell 1967)

    (a) Zeigen Sie, dass Greedy-Colour$(G, \sigma) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \min\{i, d(\sigma(i)) + 1\}$ für jeden Graphen G und jede Anordnung seiner Knoten σ gilt.

    (b) Die Zahl $1 + \max_{1 \leq i \leq n} \min\{i-1, d(\sigma(i))\}$ wird minimal für eine Anordnung $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to V$ der Knoten in Reihenfolge nicht zunehmender Knotengrade $d(\sigma(1)) \geq \ldots \geq d(\sigma(n))$.

24. (Für Ambitionierte.) Zeigen Sie: Es gibt eine Familie $\{\hat{B}_k\}_{k \geq 2}$ bipartiter Graphen, sodass

    $$\text{Greedy-Colour}(\hat{B}_k, \sigma_{deg}) = \Omega(|V(\hat{B}_k)|)$$

    für jede Anordnung σ_{deg} der Knoten von $\hat{B}_k$ in Reihenfolge nicht zunehmender Knotengrade gilt.

25. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Ohren in einer Ohrenzerlegung eines zweifach zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ stets gleich $m - n$ ist, wobei $n = |V|$ und $m = |E|$.

26. Ein Graph G ist genau dann Block-Artikulations-Graph eines (anderen) zusammenhängenden Graphen, wenn G ein Baum ist, in dem je zwei Blätter geraden Abstand haben.

27. Zeigen Sie: Das Zentrum eines zusammenhängenden Graphen liegt in einem Block.