Algorithmische Graphentheorie SS 2009

2. Übungsblatt

11. Die Taillenweite (Engl. "*girth*") $g(G)$ und ein kürzester Kreis in einem Graphen G lassen sich in Zeit $O(nm)$ berechnen.

12. Zeigen Sie:

    (a) Ein bipartiter Graph hat $m \leq n^2/4$ viele Kanten.

    (b) Ob ein Graph G das Komplement eines bipartiten Graphen ist, lässt sich in Zeit $O(n+m)$ testen. [Beachten Sie: das Komplement kann $\Omega(n^2)$ viele Kanten enthalten.]

13. (Toida 1973, McKee 1984) Ein zusammenhängender Graph is Eulersch genau dann, wenn jede Kante in ungerade vielen Kreisen enthalten ist. [Hinweis: Benutzen Sie Satz 2.1 (ii). Bei "$\Rightarrow$" bestimmen Sie für eine Kante $\{u, v\} \in E$ zunächst die Parität der Anzahl aller $u-v$-Wege in $G-e$.]

14. Zeigen Sie, dass folgende Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: Es existiert ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq n$, sodass G nicht Hamiltonsch ist und $\forall S \subset V$, $S \neq \emptyset$, der Graph $G - S$ höchstens $|S|$ Zusammenhangskomponenten besitzt.

15. (a) Zeigen Sie: Für einen bipartiten Hamiltonschen Graphen $G = (V_1 \dot\cup V_2, E)$ gilt: $|V_1| = |V_2|$.

    (b) Das *kartesiche Produkt* $G_1 \times G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist definiert durch $V := V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ mit $\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in E$ genau dann, wenn $u_1 = v_1$ und $\{u_2, v_2\} \in E_2$ oder $\{u_1, v_1\} \in E_1$ und $u_2 = v_2$. Es gilt also beispielsweise $C_4 = K_2 \times K_2$.

    Sei P_r, $r \in \mathbb{N}$, ein Pfad der Länge r. Zeigen Sie: der zweidimensionale Gittergraph $P_r \times P_s$ ist genau dann Hamiltonsch, wenn r oder s gerade ist.

16. Zeigen Sie, dass der d-dimensionale Würfel Q_d, $d \geq 2$, Hamiltonsch ist.

17. Zeigen Sie:

    (a) Das Entscheidungsproblem HAMILTONKREIS "Besitzt ein gegebener bipartiter Graph G einen Hamiltonkreis" ist NP-vollständig.

    (b) Das Entscheidungsproblem HAMILTONPFAD "Besitzt ein gegebener Graph G einen Hamiltonpfad" ist NP-vollständig.

18. Zeigen Sie: Das Problem, in einem Graphen G einen spannenden Baum von minimalem Maximalgrad zu konstruieren, ist NP-schwer.

19. Konstruieren Sie

    (a) einen zusammenhängenden 4-regulären Graphen auf n Knoten

    (b) einen 2-zusammenhängenden, 4-regulären Graphen

    jeweils ohne Hamiltonkreis.

    Hinweis: Wenden Sie zB. Lemma 2.2.1 an.

20. (Für Ambitionierte) Ein Graph heißt *Hamiltonsch zusammenhängend*, wenn es zweischen je zwei Knoten u und v einen Hamiltonschen u-v-Pfad gibt.

    (a) Sei in einem Graphen G die Gradsumme nicht benachbarter Knoten $\geq n+1$. Dann gilt $k(G) \geq \alpha(G) + 1$.

    (b) Ein Graph G mit $k(G) \geq \alpha(G) + 1$ ist Hamiltonsch zusammenhängend.

    (c) Ist die $(n+1)$-te Hamiltonhülle $H_{n+1}(G)$ isomorph zu K_n, $H_{n+1}(G) \simeq K_n$, so ist G Hamiltonsch zusammenhängend.