Algorithmische Graphentheorie SS 2009
1. Übungsblatt

1. Der *Durchmesser* $diam(G)$ eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist als Länge eines längsten kürzesten Weges definiert, d.h. $diam(G) = \max_{u,v \in V} dist(u, v)$. Der *Radius* $rad(G)$ eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist hingegen $rad(G) = \min_{u \in V} \max_{v \in V} dist(u, v)$. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen für jeden zusammenhängenden Graphen gelten:

   $$rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$$

   Man finde für jede dieser Ungleichungen Graphen, bei denen Gleichheit gilt.

2. Das *Zentrum* eines zusammenhängenden Graphen ist die Menge der Knoten $u \in V$ mit $\max_{v \in V - u} dist(v, u) = rad(G)$. Zeigen Sie

   (a) Das Zentrum eines Baumes besteht aus einem Knoten oder aus einem Paar von Knoten, die durch eine Kante verbunden sind.

   (b) Durchmesser und Zentrum können auf Bäumen in Zeit $O(n)$ bestimmt werden.

3. Zeigen Sie: Ein Graph G mit $\Delta(G) = 2$ ist eine (Knoten-)disjunkte Vereinigung von Kreisen und Pfaden.

4. Zeigen Sie: Ein Graph ist bipartit genau dann, wenn $\alpha(H) \geq \frac{|H|}{2}$ für alle induzierten Subgraphen $H \subseteq G$.

5. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und u, v zwei Knoten aus V. Eine Knotenmenge $A \subset V - u - v$ (bzw. eine Kantenmenge $F \subseteq E$) heißt *u-v-trennend* falls u und v in G aber nicht in $G - A$ (bzw. in $G - F$) durch einen Pfad verbunden sind. Eine Knotenmenge $A \subset V$ (bzw. eine Kantenmenge $F \subseteq E$) heißt *trennend*, falls es Knoten u und v gibt, so dass A (bzw. F) u-v-trennend ist. Eine trennende Kante heißt auch *Brücke*, ein trennender Knoten auch *Artikulation* oder *Schnittpunkt*. Die leere Knoten- oder Kantenmenge heißt trennend genau dann, wenn der Graph unzusammenhängend ist.

   Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und a ein Knoten in G. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

   (i) a ist eine Artikulation in G.

   (ii) Es gibt zwei Konten $u, v \in V - a$, sodass a auf jedem u-v-Weg liegt.

   (iii) Es gibt eine Partition $V - a = X \mathbin{\dot\cup} Y$ mit $X \neq \emptyset \neq Y$, sodass für je zwei Knoten $x \in X$ und $y \in Y$ der Knoten a auf jedem x-y-Weg liegt.

6. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *geodätisch*, wenn es für alle $(u, v) \in V \times V$ genau einen kürzesten u-v-Pfad in G gibt. Ein Graph G ist ein Baum genau dann, wenn G bipartit und geodätisch ist.

7. Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum genau dann, wenn es eine (sogenannte Abpflück)Anordnung v_1, …, v_n seiner Knoten gibt, sodass für $i = n, \ldots, 1$ gilt: v_i ist ein Blatt in $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$.

8. Der *Kanten*- oder *Linegraph* $L(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ hat die Kanten von G als Knotenmenge, und zwei Kanten $e, f \in E$ sind in $L(G)$ als Knoten benachbart genau dann, wenn sie in G inzidieren (wenn also $e \cap f \neq \emptyset$).

   Zeigen Sie: Der Linegraph eines Eulerschen Graphen ist Eulersch.

9. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A \mathbin{\dot\cup} B$ ein Partition von V, $A \neq \emptyset \neq B$. Die Menge aller zwischen A und B verlaufenden Kanten heißt dann *Schnitt* und wird mit

   $$\langle A, B\rangle := \{\{a, b\} \in E : a \in A \wedge b \in B\}.$$

   Zeigen Sie: ein zusammenhängender Graph ist Eulersch genau dann, wenn jeder Schnitt gerade viele Kanten enthält.

10. (Für Ambitionierte.)
Ein Graph G heißt *willkürlich durchlaufbar* von einem Knoten $v \in V$ aus, wenn man stets einen Eulerschen Kantenzug in G erhält, wie auch immer man die Kanten von G beginnend in v, abläuft.

   (a) (Ore, 1951)
   Ein Graph ist willkürlich durchlaufbar von $v \in V$ aus, genau dann, wenn jeder Kreis in G den Knoten v enthält.

   Wenn G von v aus willkürlich durchlaufbar ist, so

   (b) (Bäbler, 1953)
   ist $d(v) = \Delta(G)$.

   (c) (Harary, 1957)
   kann nur v ein Artikulationsknoten von G sein.